HÜLLENBILDUNG IN NEARNESS – KATEGORIEN

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
des Fachbereichs
Mathematik
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Norbert Heldermann
aus Stuttgart

1977

1978

H Ü L L E N B I L D U N G

I N

N E A R N E S S - K A T E G O R I E N

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

des

Fachbereichs Mathematik

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Norbert Heldermann

aus Stuttgart

1977

1. Referent : Prof. Dr. G. Preuß

2. Referent : Prof. Dr. H. Pachale

3. Referent : Prof. Dr. K. Kutzler

Tag der mündlichen Prüfung :

(letzter Prüfungstag) 21.2.1978

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

INHALT

Einleitung 4

1. Kapitel Topologische Kategorien

1. Grundlegende Sätze und Definitionen 11
2. Nearness - Kategorien 17
3. Kommutative Operationen und geschachtelte Kategorien 21

2. Kapitel Topologische Praenearness-Räume

1. Der Funktor T 31
2. Initiale und finale Konstruktionen 52
3. Unterraumhüllen topologischer Raumklassen 57
4. Bireflektive Hüllen topologischer Raumklassen 63
5. Bicoreflektive Hüllen topologischer Raumklassen 73

3. Kapitel Einfache Kategorien

1. Near ist nicht einfach erzeugt 78
2. Die bireflektive Hülle von $[0,1]$ 83
3. Die bireflektiven Hüllen von D_2, $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ 86

4. Kapitel Hausdorffsche Nearness-Räume

1. Die Kategorie HausNear 97
2. Epireflektive Hüllen in HausNear 110

Beispiele 119
Bezeichnungen 122
Literaturverzeichnis 123
Lebenslauf 126

Einleitung

A.Tychonoff [51] zeigte 1930, daß jeder kompakte T_2-Raum ein abgeschlossener Unterraum eines Produktes von Kopien des Einheitsintervalles ist.

Ausgehend von Tychonoffs Ergebnis entwickelten S.G.Mrowka ([43] 1958), R.Engelking ([12] 1958) und deren Schüler (Blefko([6] 1965), Shore u.a.) die Theorie der E-kompakten und E-regulären Räume für einelementige Klassen E von topologischen Räumen.

Indem er E-Kompaktheit und E-Regularität für beliebige Klassen von topologischen Räumen untersuchte, erkannte H.Herrlich ([18] 1967), daß zahlreiche Ergebnisse dieser Theorie Spezialfälle allgemeinerer kategorieller Aussagen darstellen. Damit waren Verbindungen zwischen topologischen Untersuchungen und kategoriellen Methoden aufgezeigt worden, die in der Theorie der (topologischen) Reflektionen und Coreflektionen vor allem von J.R.Isbell([33] 1964,et al.), J.F.Kennison ([38] 1965, et al.), P.Freyd ([14] 1967), H.Herrlich ([20] 1967, [21] 1968, [22] 1972, et al.), J. van der Slot ([20] 1967), S.P.Franklin ([13] 1969, et al.) und G.E.Strecker ([22] 1972) weiterentwickelt wurden.

So zeigte sich, daß es zu jeder Klasse E topologischer Hausdorff-Räume eine kleinste umfassende epireflektive Unterkategorie der Kategorie Haus der Hausdorff-Räume gibt (die sogenannte epireflektive Hülle), deren Objekte durch Produkt- und Unterraumbildung in Haus von Räumen aus E erhalten werden können.

Weitere Untersuchungen ergaben sehr bald, daß viele der für die Kategorie der topologischen Räume oder Hausdorff-Räume erzielten Aussagen auch in anderen Kategorien, wie zum Beispiel den uniformen Räumen, Limesräumen, Hüllenräumen u.a. ihre Gültigkeit besitzen.

Diese Erkenntnis führte O.Wyler ([52] 1971) zur Theorie der topologischen Kategorien, die von G.C.L.Brümmer ([7] 1971, et al.), R.E.Hoffmann ([29] 1972, et al.), T.Marny ([40] 1973), H.Herrlich([27] 1974, [26] 1974, et al.), S.H.Kamnitzer ([35]

1974), L.D.Nel ([46] 1975, et al.) u.a. weiterentwickelt wurde. Hier stehen kategorielle Methoden und allgemeine kategorielle Aussagen im Vordergrund.
H.Herrlich ([25] 1974) zeigte, daß auch ein mehr topologisches Vorgehen möglich ist. Indem er als einigendes Konzept den Begriff der Nähe von Mengensystemen axiomatisierte, gelang es ihm, Kategorien anzugeben, die einerseits die meisten der bisher von Topologen studierten Kategorien als Unterkategorien enthalten, andererseits aber neben kategoriellen auch topologischen Untersuchungen zugänglich sind. Dies führte zur Theorie der Nearness-Räume.

Nearness-Räume sind Paare (X,ξ), wobei X eine Menge und ξ eine Teilmenge von $\mathcal{P}^2(X)$ ist. Dabei erfüllt ξ Axiome derart, daß die Elemente von ξ einer intuitiven Vorstellung von nahen Mengensystemen entsprechen. Die Kategorie Near aller Nearness-Räume und N-stetigen Abbildungen enthält die Kategorie T-Near der topologischen R_0-Räume und stetigen Abbildungen, die Kategorie U-Near der uniformen Räume und gleichmäßig stetigen Abbildungen und die Kategorie C-Near aller kontigualen Räume [34] und kontigualen Abbildungen als volle Unterkategorien.

Ein Ansatz dieser Art wurde bereits 1951 von K.Morita [42] gemacht. Dabei wurde ein zum Konzept der Nähe äquivalentes Konzept für Überdeckungsfamilien benutzt.

Die Kategorie SNear der Seminearness-Räume war 1962 von M.Katětov unter den Namen Q-Räume [36] und merotopische Räume ([37] 1965) eingeführt worden.
SNear enthält die Kategorie Near der Nearness-Räume, die Kategorie Conv der Konvergenzräume [48] und die Kategorie Lim [48] der Limesräume als volle Unterkategorien. SNear kommt vor allem bei der Untersuchung kartesisch-abgeschlossener Kategorien Bedeutung zu ([48], [4]).

Eine weitere Verallgemeinerung des Seminearness-Raumes ist

der Praenearness-Raum [26]. Die Kategorie PNear der Praenearness-Räume enthält auch die Kategorie HNear der Heminearness-Räume ([17], [30]) als volle Unterkategorie. Ein Praenearness-Raum ist genau dann ein Nearness-Raum, wenn er ein Seminearness-Raum und ein Heminearness-Raum ist.
H.Herrlich ([26] 1974) zeigte, daß die Kategorie T-Near der topologischen Nearness-Räume eine bicoreflektive Unterkategorie von Near ist, d.h. jedem Nearness-Raum kann ein "unterliegender" topologischer Raum zugeordnet werden.
Somit besitzt Near eine bicoreflektive Unterkategorie, deren Objekte sich durch die Eigenschaften eines Hüllenoperators beschreiben lassen.

M.S.Hastings ([17] 1975) ging nun in ihrer Dissertation der Frage nach, ob auch die Kategorien SNear, HNear und PNear derartige Unterkategorien besitzen. Sie führte den Begriff des topologischen Praenearness-Raumes ein, und wies nach, daß die Kategorie T-PNear der topologischen Praenearness-Räume isomorph ist zur Kategorie der praetopologischen Räume, deren Objekte durch eine Hüllenoperation bestimmt sind (2.1.1).
Die Kategorie T-SNear der topologischen Praenearness-Räume, die auch Seminearness-Räume sind, ist dann isomorph zur Kategorie der semitopologischen Räume ("closure spaces"), die von E.Cech [8] eingehend untersucht wurden.
Jedoch wird von M.S.Hastings irrtümlich angenommen, daß die Kategorien T-SNear und T-PNear bicoreflektive Unterkategorien von SNear bzw. PNear sind. Auch bleiben die Beziehungen zwischen T-PNear, T-SNear, T-Near und der Kategorie T-HNear der topologischen Heminearness-Räume ungeklärt.

Ziel dieser Arbeit ist es nun, die epireflektive oder bicoreflektive Hülle von speziellen Raumklassen in den genannten Kategorien anzugeben. Dabei erörtern wir die folgenden Fragen (die Fragen (4)-(9) sowie Teile von (2) stellte H.Herrlich [23] 1973 auf der Categorical Topology Conference an der Southern Illinois University):

(1) Ist A eine topologische Kategorie (1.1.1), B eine bicoreflektive Unterkategorie von A und K eine Klasse von B-Objekten, in welcher Beziehung steht dann die epireflektive Hülle von K in A zur epireflektiven Hülle von K in B ?

(2) Welche Beziehungen bestehen zwischen T-Near, T-SNear, T-HNear und T-PNear ? Lassen sich für T-SNear und T-PNear Unterkategorien von PNear angeben, in denen sie als bicoreflektive Unterkategorien enthalten sind ? Wie sehen die epireflektiven Hüllen dieser Klassen aus ? Welches sind die bicoreflektiven Hüllen von HNear und T-HNear in PNear ?

(3) Sind die Kategorien U-Near, R-Near, C-Near, TB-Near und Near als Unterkategorien von Near einfach erzeugt ?

Wie sehen die epireflektiven Hüllen in Near aus von

(4) dem zweipunktigen diskreten N-Raum,

(5) dem diskreten N-Raum mit abzählbar vielen Elementen,

(6) der Klasse aller diskreten N-Räume,

(7) dem Raum der rationalen Zahlen, versehen mit der natürlichen Topologie ?

(8) Gibt es eine Eigenschaft für Nearness-Räume, die dem topologischen Konzept der hausdorffschen Eigenschaft entspricht ?

(9) Gibt es eine Eigenschaft für Nearness-Räume, die dem topologischen Konzept der nulldimensionalen Eigenschaft entspricht ?

Die hier erzielten Resultate werden im Folgenden in der Reihenfolge der Kapitel dargestellt:

Im ersten Kapitel wird nach Bereitstellung der grundlegenden Definitionen und Sätze über topologische Kategorien und Nearness-Räume gezeigt, daß für beliebige Raumklassen in einer topologischen Kategorie die Operation der bireflektiven (oder epireflektiven) Hüllenbildung mit der Anwendung eines Bicoreflektors vertauschbar ist (1.3.2). Diese Kommutativität läßt sich unter Einschränkung an den Bicoreflektor auch für allgemeinere Kategorien beweisen (1.3.5). Das beantwortet die Frage (1). Insbesondere gilt dann für eine Klasse K von topologischen N-Räumen, daß die bireflektive Hülle von K in T-Near identisch ist mit dem Bild der bireflektiven Hülle von K in Near unter dem Bicoreflektor T .

Das zweite Kapitel befaßt sich mit topologischen Praenearness-Räumen. Als Antwort auf Frage (2) wird eine bireflektive Unterkategorie A-PNear von PNear angegeben (2.1.16), mit der Eigenschaft, daß jedes A-PNear-Objekt eine unterliegende Praetopologie besitzt, und daß diese Zuordnung durch einen Bicoreflektor T geschieht, dessen Einschränkung auf Near mit dem zu T-Near gehörigen Bicoreflektor übereinstimmt. Die Einschränkung des Funktors T auf die Kategorie Grill der grillbestimmten Praenearness-Räume [4] liefert gerade den Bicoreflektor, der zur Kategorie Conv ([4],[48]) der Konvergenzräume gehört (2.1.13).
Die Kategorien T-Near, T-SNear, T-HNear, T-PNear und Conv sind in derselben Weise als bireflektive oder bicoreflektive Unterkategorien untereinander angeordnet, wie ihre Bezugskategorien Near, SNear, HNear, PNear und Grill (2.1.32).
In §2.3 werden in Fortsetzung der Untersuchungen von H.L. Bentley ([2] 1975) und M.S.Hastings ([17] 1975) die Klassen aller Unterräume der genannten Kategorien von topologischen Praenearness-Räumen angegeben. Im Anschluß werden die epireflektiven Hüllen dieser Kategorien untersucht. Man erhält: Die epireflektive Hülle von Conv ist PNear (2.4.3) und die epireflektive Hülle von T-PNear ist A-PNear (2.3.4). In den Fällen T-Near und T-SNear charakterisieren wir eine Unterka-

tegorie von Near bzw. SNear, die sogar alle Unterräume umfaßt, jedoch in der epireflektiven Hülle enthalten ist (2.4.8,2.4.11). Schließlich werden - aufbauend auf Resultaten von M.Katetov ([36],[37]) - die bicoreflektiven Hüllen von T-HNear, T-Near, HNear und Near in PNear angegeben (§2.5).

Im dritten Kapitel wird zunächst gezeigt, daß eine epireflektive Unterkategorie E von Near nicht einfach erzeugt ist, falls T[E] , das Bild von E unter dem zu T-Near gehörigen Bicoreflektor T, die Klasse der regulären topologischen Räume umfaßt (3.1.4),oder falls die diskreten Nearness-Räume in E enthalten sind (3.1.5). Es folgt, daß die Kategorien Near, C-Near (kontiguale Nearness-Räume), U-Near (uniforme Nearness-Räume), R-Near (reguläre Nearness-Räume) und TB-Near (totalbeschränkte Nearness-Räume) nicht einfach erzeugt sind (3.1.6). Das beantwortet die Frage (3).
Die epireflektive Hülle des Einheitsintervalls ist die Kategorie Pr-Near der proximalen N1-Räume ([23]1973). Für dieses Resultat wird ein Beweis gegeben (3.2.2).
Als Antwort auf die Frage (9) wird unter Verwendung einer Dimensionsfunktion von H.Herrlich ([28]1975) die bireflektive Unterkategorie OdimNear der nulldimensionalen Nearness-Räume definiert (3.3.2). Dabei stellt sich heraus, daß ein Nearness-Raum (X,ξ) genau dann nulldimensional ist, falls jede ξ-Überdeckung $\mathcal{A}$, d.h. $\{X\setminus A \mid A\in\mathcal{A}\}\notin\xi$, von einer Zerlegung $\mathcal{Z}$ verfeinert wird, die auch eine ξ-Überdeckung ist.
Nulldimensionale Nearness-Räume stehen in einem engen Zusammenhang zu der Klasse OdimTop aller topologisch nulldimensionalen Räume, also jenen Räumen,die eine Basis aus offen-abgeschlossenen Mengen besitzen. Es gilt T[OdimNear] = OdimTop. Den Schnitt von OdimNear mit T-Near bilden gerade die ultraparakompakten topologischen Räume (3.3.3).
Die nulldimensionalen Nearness-Räume spielen in der Beantwortung der Fragen (4)-(7) die entscheidende Rolle. Die dort gesuchten epireflektiven Unterkategorien sind
zu Frage (4): die Kategorie der kontiguale, nulldimensiona-

len N1-Räume (3.3.6),
zu den Fragen (5) und (7): die Kategorie der abzählbar-kontigualen, nulldimensionalen N1-Räume (3.3.9, 3.3.17),
zu Frage (6): die Kategorie aller nulldimensionalen N1-Räume (3.3.18).

Frage (8) wird im vierten Kapitel behandelt. Hierzu werden hausdorffsche Nearness-Räume untersucht, wie sie von S.A. Naimpally ([45] 1974) eingeführt wurden (4.1.2). Die Kategorie HausNear der hausdorffschen Nearness-Räume ist eine extrem-epireflektive Unterkategorie von Near (4.1.4), die die topologischen Hausdorff-Räume als bicoreflektive Unterkategorie enthält, wobei T der zugehörige Bicoreflektor ist (4.1.6). Es wird bewiesen, daß die Epimorphismen in HausNear gerade die dichten N-stetigen Abbildungen, die extremen Monomorphismen gerade die abgeschlossenen N-Einbettungen sind (4.1.16). Daraus läßt sich ableiten, daß die kompakten T_2-Räume eine epireflektive Unterkategorie von HausNear bilden (4.2.1). Man erhält, daß die epireflektiven Hüllen von Raumklassen von kompakten T_2-Räumen in HausNear stets identisch sind mit den epireflektiven Hüllen in Haus, der Kategorie der topologischen Hausdorff-Räume (4.2.3).
Der Zusammenhang zwischen der epireflektiven Hülle in Haus und der epireflektiven Hülle in HausNear wurde schon in Kapitel 1 erarbeitet: Für eine Klasse von hausdorffschen Nearness-Räumen ist die Operation der epireflektiven Hüllenbildung vertauschbar mit der Anwendung von T (4.2.5).

Mein Dank gilt Prof.Dr.G.Preuß, der die Arbeit betreute, und Prof. Dr.H.Herrlich für ihr Interesse und ihre Förderung. Ebenso danke ich meinen Kollegen H.Brandenburg und H.Pust für die vielen Diskussionen, aus denen zahlreiche Anregungen hervorgingen.

Kapitel 1

Topologische Kategorien

§ 1.1 Grundlegende Definitionen und Sätze

Einzelheiten, die hier nicht ausgeführt werden, findet man bei [24], [26] oder [47].

1.1.1 Definition [26]: Eine Kategorie $\underline{A}$ wird topologische Kategorie genannt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Objekte von $\underline{A}$ sind Paare (X,ξ), wobei X eine Menge ist (die "unterliegende Menge") und ξ eine $\underline{A}$-Struktur auf X.

(2) Morphismen $f:(X,\xi)\longrightarrow(Y,\eta)$ sind Abbildungen $f:X\longrightarrow Y$, so daß die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

i) Für jedes $\underline{A}$-Objekt (X,ξ) ist $1_X:(X,\xi)\longrightarrow(X,\xi)$ ein Morphismus.

ii) Sind $f:(X,\xi)\longrightarrow(Y,\eta)$ und $g:(Y,\eta)\longrightarrow(Z,\zeta)$ Morphismen, so auch $g\circ f:(X,\xi)\longrightarrow(Z,\zeta)$.

(3) Für jede Menge X, jede Familie $(Y_i,\eta_i)_{i\in I}$ von $\underline{A}$-Objekten und jede Familie $(f_i:X\longrightarrow Y_i)_{i\in I}$ von Abbildungen existiert eine $\underline{A}$-Struktur ξ auf X, die $\underline{A}$-initial ist bezüglich $(X,(f_i)_{i\in I},(Y_i,\eta_i)_{i\in I})$, d.h.

i) Für alle $i\in I$ ist $f_i:(X,\xi)\longrightarrow(Y_i,\eta_i)$ ein Morphismus, und

ii) wenn (Z,ζ) ein $\underline{A}$-Objekt ist, und $g:Z\longrightarrow X$ eine Abbildung, so daß für alle $i\in I$ $f_i\circ g:(Z,\zeta)\longrightarrow(Y_i,\eta_i)$ ein Morphismus ist, dann ist $g:(Z,\zeta)\longrightarrow(X,\xi)$ ein Morphismus.

(4) Für jede Menge X ist die Klasse aller $\underline{A}$-Strukturen auf X eine Menge.

(5) Jede einpunktige Menge besitzt genau eine $\underline{A}$-Struktur.

(6) Sind ξ und η $\underline{A}$-Strukturen auf X, so daß $1_X:(X,\xi)\longrightarrow(X,\eta)$ und $1_X:(X,\eta)\longrightarrow(X,\xi)$ Morphismen sind, dann gilt $\xi = \eta$.

Der Begriff der topologischen Kategorie, wie er hier vorgestellt wurde, ist um die Eigenschaften (4)-(6) stärker als die übliche Fassung bei H.Herrlich [26]. Der duale Begriff zur initialen Struktur ist die finale Struktur.

Sind (X,ξ) und (Y,η) Objekte einer topologischen Kategorie $\underline{A}$, so heißt (X,ξ) $\underline{A}$-Unterobjekt von (Y,η), falls e[illegible] extremer Monomorphismus [illegible] $\longrightarrow$ [illegible] in $\underline{A}$ existiert. Besteht bezüglich der betrachteten Kategorie $\underline{A}$ kein Zweifel, schreiben wir auch einfach Unterobjekt oder Unterraum. Entsprechend heißt (Y,η) $\underline{A}$-Quotient von (X,ξ), falls ein extremer Epimorphismus $g:(X,\xi)\longrightarrow(Y,\eta)$ in $\underline{A}$ existiert.

1.1.2 Satz: Seien (X,ξ) und (Y,η) Objekte einer topologischen Kategorie $\underline{A}$ und $f:(X,\xi)\longrightarrow(Y,\eta)$ ein Morphismus. Dann ist f ein

(1) Monomorphismus genau dann, wenn $f:X\longrightarrow Y$ injektiv ist,

(2) Epimorphismus genau dann, wenn $f:X\longrightarrow Y$ surjektiv ist,

(3) extremer Monomorphismus genau dann, wenn f eine $\underline{A}$-Einbettung ist, d.h. wenn $f:X\longrightarrow Y$ injektiv ist, und wenn ξ $\underline{A}$-initial ist bzgl. $(X,f,(Y,\eta))$.

(4) extremer Epimorphismus genau dann, wenn f eine $\underline{A}$-Quotientenabbildung ist, d.h. wenn $f:X\longrightarrow Y$ surjektiv ist, und η $\underline{A}$-final ist bzgl. $((X,\xi),f,Y)$.

Unterkategorien seien stets voll und isomorphie-abgeschlossen.

In topologischen Kategorien besitzt jede Menge X eine Struktur α, diskrete Struktur genannt, die dadurch eindeutig charakterisiert ist, daß für jedes Objekt (Y,η) jede Abbildung von X nach Y ein Morphismus ist. Der duale Begriff ist die indiskrete Struktur ω auf X.
Die Unterkategorie der diskreten Objekte in einer topologischen Kategorie $\underline{A}$ wird mit $\underline{Dis}$, die Unterkategorie der indiskreten mit $\underline{Ind}$ bezeichnet.

Wir betrachten nun eine feste topologische Kategorie $\underline{A}$.

Unterkategorien $\underline{E}$, die abgeschlossen sind bezüglich der Bildung von $\underline{A}$-Produkten und $\underline{A}$-Unterobjekten ($\underline{A}$-Coprodukten und $\underline{A}$-Quotienten), werden epireflektive (bicoreflektive) Unterkategorien genannt. Es ist wohlbekannt, daß zu solchen Unterkategorien Funktoren existieren - Epireflektoren (Bicoreflektoren) genannt - die sie vollständig charakterisieren. Im Allgemeinen bezeichnen wir einen solchen Reflektor mit demselben Buchstaben wie die zugehörige Unterkategorie. Das Bild eines $\underline{A}$-Objekts (X,ξ) unter einem Reflektor E wird mit $(X,\xi)_E$ bezeichnet. Ist die unterliegende Menge X von (X,ξ) bei der Anwendung jedoch unverändert geblieben, so schreiben wir stets für das Bild (X,ξ_E), um zu verdeutlichen, daß E nur eine Strukturveränderung auf der Menge X bewirkt hat.
Im Falle einer epireflektiven Unterkategorie $\underline{E}$ existiert zu jedem $(X,\xi)\in\underline{A}$ ein $\underline{A}$-Epimorphismus

$$r_X:(X,\xi)\longrightarrow(X,\xi_E)$$

der die universelle Eigenschaft besitzt, daß jeder Morphismus von (X,ξ) in ein $\underline{E}$-Objekt eindeutig über r_X fasert.

Im Falle einer bicoreflektiven Unterkategorie $\underline{C}$ ist für alle $(X,\xi)\in\underline{A}$ die Identität auf X $1_X:(X,\xi_C)\longrightarrow(X,\xi)$ der Morphismus mit universeller Eigenschaft.
Eine epireflektive Unterkategorie von $\underline{A}$ heißt bireflektiv,

falls alle universellen Epimorphismen Bimorphismen - d.h. wegen 1.1.2 identische Abbildungen - sind.

1.1.3 Satz: Jede Klasse $\underline{K}$ von $\underline{A}$-Objekten ist in einer kleinsten epireflektiven (bireflektiven, bicoreflektiven) Unterkategorie von $\underline{A}$ enthalten, der epireflektiven (bireflektiven, bicoreflektiven) Hülle $EH_{\underline{A}}(\underline{K})$ ($BH_{\underline{A}}(\underline{K})$, $CH_{\underline{A}}(\underline{K})$) von $\underline{K}$ in $\underline{A}$.

1.1.4 Satz [40]: Sei $\underline{K} \subset \underline{A}$. dann sind für (X,ξ) äquivalent:

(1) $(X,\xi) \in BH_{\underline{A}}(\underline{K})$,

(2) ξ ist die $\underline{A}$-initiale Struktur auf X bzgl. der Klasse aller Morphismen von (X,ξ) in $\underline{K}$-Objekte.

1.1.5 Definition ([40], 3.3.3): (1) Sei (I,ω) der zweipunktige indiskrete Raum in $\underline{A}$. Dann heißt ein $\underline{A}$-Objekt (X,ξ) $T_0^{\underline{A}}$-Raum, falls jeder Morphismus $f:(I,\omega) \longrightarrow (X,\xi)$ konstant ist.

(2) Die Unterkategorie der $T_0^{\underline{A}}$-Räume wird mit $\underline{T_0^{\underline{A}}}$ bezeichnet. Ist ein Irrtum in Bezug auf die betrachtete Kategorie $\underline{A}$ ausgeschlossen, schreiben wir einfach $\underline{T_0}$.

1.1.6 Satz [40]: (1) Die T_0-Räume sind die größte epireflektive Unterkategorie von $\underline{A}$, die nicht bireflektiv ist.

(2) Die T_0-Räume sind eine extrem-epireflektive Unterkategorie von $\underline{A}$.

(3) Die epireflektive Hülle einer Raumklasse $\underline{K} \subset \underline{A}$ stimmt genau dann mit der bireflektiven

Hülle in $\underline{A}$ überein, wenn $\underline{K}$ einen Raum enthält, der kein T_o-Raum ist.

(4) Ist $\underline{K}$ eine Klasse von T_o-Räumen, so gilt: $EH_{\underline{A}}(\underline{K}) = BH_{\underline{A}}(\underline{K}) \cap \underline{T_o}$.

(5) Ist $\underline{B}$ eine bireflektive Unterkategorie von $\underline{A}$ mit Bireflektor B, so ist der zu $\underline{B} \cap \underline{T_o}$ gehörige Epireflektor das Kompositum $T_o \circ B$ des zu $\underline{T_o}$ gehörigen Epireflektors T_o mit B.

Definition: Sei $\underline{K} \subset \underline{A}$, $(K,\kappa) \in \underline{K}$, X eine Menge und $f: X \longrightarrow K$ eine Abbildung. $\underline{K}$ heißt dann initial-urbild-abgeschlossen in $\underline{A}$, wenn (X,ξ), wo ξ die $\underline{A}$-initiale Struktur auf X bzgl. f [illegible] ist, stets wieder zu $\underline{K}$ gehört.

Satz: Sei $\underline{K} \subset \underline{A}$ eine initial-urbild-abgeschlossene Raumklasse in $\underline{A}$, die einen Raum enthält, der kein T_o-Raum ist. Dann sind für $(X,\xi) \in \underline{A}$ äquivalent:

(1) [illegible] ein Element der bireflektiven Hülle $BH_{\underline{A}}(\underline{K})$ von $\underline{K}$ in $\underline{A}$,

(2) (X,ξ) ist ein Element der epireflektiven Hülle $EH_{\underline{A}}(\underline{K})$ von [illegible]

(3) $\xi = \inf_{\underline{A}}\{\kappa \mid (X,\kappa) \in \underline{K},\ 1_X : (X,\xi) \longrightarrow (X,\kappa)$ ist ein Morphismus$\}$,

wobei $\inf_{\underline{A}}$ die $\underline{A}$-initiale Struktur auf X bzgl. den Identitäten in die genannten Objekte $(X,\kappa) \in \underline{K}$ bezeichnet.

Beweis: 1.1.4 und 1.1.6 •

1.1.9 Definition: Sei $\underline{A}$ eine topologische Kategorie. Für eine Klasse $\underline{K} \subset \underline{A}$ von Räumen bezeichne $\mathrm{Sub}_{\underline{A}}(\underline{K})$ die Klasse aller $\underline{A}$-Unterobjekte von $\underline{K}$-Objekten, $\mathrm{Quot}_{\underline{A}}(\underline{K})$ die Klasse aller $\underline{A}$-Quotienten von $\underline{K}$-Objekten.

1.1.10 Satz: $\mathrm{Sub}_{\underline{A}}$ ist eine Operation, die Teilklassen von $\underline{A}$ wieder Teilklassen von $\underline{A}$ zuordnet. $\mathrm{Sub}_{\underline{A}}$ erfüllt die Axiome: $(\underline{K}, \underline{L} \subset \underline{A})$

(H.1) $\mathrm{Sub}(\not\underline{\not{\emptyset}}) = \not\underline{\not{\emptyset}}$

(H.2) $\underline{K} \subset \mathrm{Sub}(\underline{K})$

(H.3) $\underline{K} \subset \underline{L} \Rightarrow \mathrm{Sub}(\underline{K}) \subset \mathrm{Sub}(\underline{L})$

(H.4) $\mathrm{Sub}(\underline{K} \cup \underline{L}) = \mathrm{Sub}(\underline{K}) \cup \mathrm{Sub}(\underline{L})$

(H.5) $\mathrm{Sub}(\mathrm{Sub}(\underline{K})) \subset \mathrm{Sub}(\underline{K})$

1.1.11 Bemerkung: Das vorausgehende Resultat kennzeichnet $\mathrm{Sub}_{\underline{A}}$ als eine kategorielle Hüllenoperation. Der Begriff der Unterraumhülle $\mathrm{Sub}_{\underline{A}}(\underline{K})$ ist dual zur Quotientenraumhülle $\mathrm{Quot}_{\underline{A}}(\underline{K})$. Die Operation $\mathrm{Quot}_{\underline{A}}$ besitzt ebenfalls die Eigenschaften (H.1) - (H.5).

§ 1.2 Nearness - Räume

1.2.1 Definition [26]: Sei X eine Menge und $\xi \subset \mathcal{P}^2(X)$. Folgende Axiome werden betrachtet[1]:

(N.1) $\mathcal{A} \ll \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \in \xi \Rightarrow \mathcal{A} \in \xi$

(N.2) $\cap \mathcal{A} \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{A} \in \xi$

(N.3) $\emptyset \neq \xi \neq \mathcal{P}^2(X)$

(N.4) $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \in \xi \Rightarrow \mathcal{A} \in \xi \vee \mathcal{B} \in \xi$

(N.5) $cl_\xi \mathcal{A} \in \xi \Rightarrow \mathcal{A} \in \xi$, wobei

$$cl_\xi \mathcal{A} = \{cl_\xi A \mid A \in \mathcal{A}\} = \{\{x \in X \mid \{\{x\}, A\} \in \xi \mid A \in \mathcal{A}\}.$$

(1) ξ heißt Prae-Nearness-Struktur (PN-Struktur) auf X und (X,ξ) ein Prae-Nearness-Raum (PN-Raum), falls ξ die Axiome (N.1) - (N.3) erfüllt.

(2) ξ heißt Semi-Nearness-Struktur (SN-Struktur) auf X und (X,ξ) ein Semi-Nearness-Raum (SN-Raum), falls ξ die Axiome (N.1) - (N.4) erfüllt.

(3) ξ heißt Hemi-Nearness-Struktur (HN-Sruktur) auf X und (X,ξ) ein Hemi-Nearness-Raum (HN-Raum), falls ξ die Axiome (N.1) - (N.3),(N.5) erfüllt ([17] und [30]).

(4) ξ heißt Nearness-Struktur (N-Struktur) auf X und (X,ξ) ein Nearness-Raum (N-Raum), falls ξ die Axiome (N.1) - (N.5) erfüllt.

1.2.2 Definition: (1) Sind (X,ξ), (Y,η) PN-Räume und $f: X \longrightarrow Y$ eine Abbildung, so heißt

$$f: (X,\xi) \longrightarrow (Y,\eta)$$

Nearness-Abbildung (N-Abbildung, N-stetig, N-Morphismus) falls für alle $\mathcal{A} \in \xi$ stets $f\mathcal{A} \in \eta$ gilt.

(2) Die Kategorie der PN-Räume und N-Abbildungen wird mit PNear bezeichnet. Die Unterkategorien der SN-Räume, HN-Räume und N-Räume werden resp.

---

[1] Dabei treffen wir die Konvention, daß $\cap \emptyset \neq \emptyset$.

SNear, HNear und Near genannt.

Vertrautheit mit den Texten [25] und [26] von H.Herrlich wird vorausgesetzt. Die hier gewählten Bezeichnungen weichen nur unwesentlich von den dortigen ab.
Nearness-Räume besitzen eine äquivalente Axiomatik mittels Überdeckungen. Ist ξ eine N-Struktur und Ξ die assoziierte Menge von Nearness-Überdeckungen (N-Überdeckungen), so gilt:

$$\mathcal{A} \in \Xi \iff (\forall \mathcal{B} \in \mathcal{A})\ \mathcal{B} \notin \Xi .$$

In dieser Fassung wurden Nearness-Räume 1951 von K.Morita [42] erstmals betrachtet. Eine weitere Axiomatik mittels "kleiner" Mengen geht auf M.Katětov [37] zurück.
Die Kategorien der obigen Definition sind topologische Kategorien im Sinne von 1.1.1. Die Bildung initialer und finaler Strukturen in diesen Kategorien wird in [26] ausführlich beschrieben. Ihr Verhältnis untereinander klärt der folgende Satz. Dabei machen wir wie in der ganzen Arbeit keinen Unterschied in der Bezeichnung eines Funktors und einer Einschränkung des Funktors auf einen kleineren Definitionsbereich.

1.2.3 Satz: (1) HNear ist eine bireflektive Unterkategorie von PNear mit

$$N:(X,\xi) \longmapsto (X, \xi_n)$$

als Bireflektor [17]. Dabei ist ξ_n wie folgt definiert:
Bezeichnet Ord die geordnete Klasse aller Ordinalzahlen, so wird für jedes $A \subset X$ und $\alpha \in \mathrm{Ord}$ ein Hüllenoperator

$$h^\alpha : \mathcal{P}^2(X) \longrightarrow \mathcal{P}^2(X)$$

durch transfinite Induktion angegeben:

$$h^0 A := A,$$

$$h^{\alpha+1} A := \{x \in X \mid \dots \in h^\alpha A\},$$

und falls $\beta \in \mathrm{Ord}$ eine Limesordinalzahl ist

$$h^\beta A := \bigcup \dots .$$

Schließlich sei

$$hA := \bigcup_{\alpha \in Ord} h^{\alpha} A \ ,$$

und für $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ gelte nun:

$$\mathcal{A} \in \xi_n \ :\Leftrightarrow\ h\mathcal{A} = \{hA \mid A \in \mathcal{A}\} \in \xi \ .$$

(2) SNear ist eine bicoreflektive Unterkategorie von PNear mit

$$S : (X,\xi) \longmapsto (X,\xi_s)$$

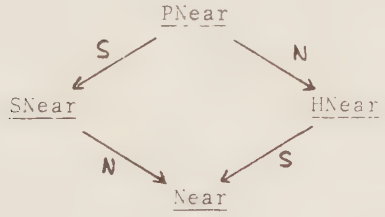
als Bicoreflektor ([26] 7.2). Dabei gilt für $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$:

$$\mathcal{A} \in \widehat{\xi_s} \ :\Leftrightarrow$$ Es existieren endlich viele Überdeckungen $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n \in \widehat{\xi}$ mit $\mathcal{U}_1 \wedge \cdots \wedge \mathcal{U}_n < \mathcal{A}$.

(3) Near = SNear $\cap$ HNear .

(4) Near ist eine bicoreflektive Unterkategorie von HNear mit S als Bicoreflektor ([17] 3.5).

(5) Near ist eine bireflektive Unterkategorie von SNear mit N als Bireflektor ([26] 8.1).



1.2.4 Satz: Ein PN-Raum (X,ξ) ist genau dann ein T_0^{PNear}-Raum (1.1.5), falls für alle $x,y \in X$ gilt:

(N1) $x \neq y \Rightarrow \{\{x\},\{y\}\} \notin \xi$.

1.2.5 Bemerkung: (1) Wie es allgemein üblich ist, bezeichnen wir die Unterkategorie der N1-PNearness-Räume mit PNear-1. Ist $\underline{K}$ eine Klasse von PN-Räumen, so wird für $\underline{K} \cap$ PNear-1 stets $\underline{K}$-1 geschrieben. Beispiele sind Near-1 und T-Near-1.

(2) Ist $\underline{K}$ keine Klasse von N1-Räumen, so sind die epireflektive und bireflektive Hülle von $\underline{K}$ in jeder der Kategorien PNear, SNear, HNear und Near gleich.
Ist jedoch $\underline{K} \subset$ PNear-1, so ist die epireflektive Hülle in jeder der obigen Kategorien -sofern es sinnvoll ist von dieser zu sprechen- gleich dem Schnitt der bireflektiven Hülle in derselben Kategorie mit PNear-1. Das ergibt sich aus 1.1.6.

§ 1.3 Kommutative Operationen

Die verschiedenen Kategorien von Nearness-Räumen sind vielfach geschachtelt. Die Klassen T-Near der topologischen N-Räume und U-Near der uniformen N-Räume sind beispielsweise beide in Near enthalten; sie sind jedoch verschieden mit nichtleerem Schnitt.
So entsteht für Klassen $\underline{K} \subset$ T-Near die Frage, welche Beziehung zwischen der bireflektiven Hülle von $\underline{K}$ in T-Near und der bireflektiven Hülle von $\underline{K}$ in Near besteht. Ebenso ist es interessant zu wissen, ob zwischen der bireflektiven Hülle einer Klasse $\underline{K}$ von uniformen Räumen in Near und der bireflektiven Hülle von $T[\underline{K}]$ in T-Near ein Zusammenhang besteht. $T[\underline{K}]$ bezeichnet dabei das Bild der Klasse $\underline{K}$ unter dem zu T-Near gehörigen Bicoreflektor T.

Eine epireflektive Unterkategorie $\underline{E}$ einer topologischen Kategorie $\underline{A}$ muß nicht wieder topologisch sein. $\underline{E}$ stellt eine allgemeinere Kategorie dar als $\underline{A}$, und um die Anwendung des folgenden Lemmas im späteren Text möglichst weitgehend zu gewährleisten, wird statt einer topologischen Kategorie eine epireflektive Unterkategorie betrachtet.

In Analogie zu Theorem 11 in [22] und Theorem A.11 in [26] erhält man:

1.3.1 Lemma: Sei $\underline{E}$ eine epireflektive Unterkategorie einer topologischen Kategorie $\underline{A}$. $\underline{C}$ sei eine bicoreflektive Unterkategorie von $\underline{E}$ mit dem zugehörigen Bicoreflektor C. Dann gilt:

(1) Ist (X,ξ) das $\underline{E}$-Produkt einer Familie $(Y_i,\eta_i)_{i\in I}$ von $\underline{E}$-Objekten, so ist $(X,\xi)_C$ das $\underline{C}$-Produkt der Familie $((Y_i,\eta_i)_C)_{i\in I}$.

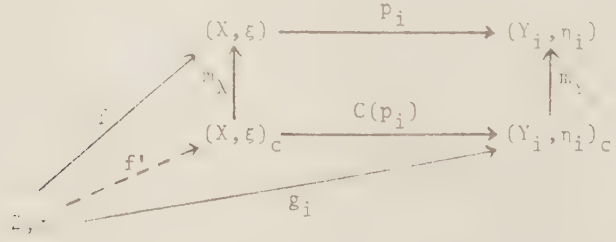
(2) Ist $\underline{E}$ eine topologische Kategorie und ist (X,ξ) ein $\underline{E}$-Unterobjekt des $\underline{E}$-Objekts (Y,η), so ist $(X,\xi)_C$ ein $\underline{C}$-Unterobjekt von $(Y,\eta)_C$.

(3) $\underline{D}$ sei eine epireflektive Unterkategorie von $\underline{E}$ mit Epireflektor D und der Eigenschaft:
(a) $C[\underline{D}]$ ist abgeschlossen bzgl. $\underline{C}$-Unterobjekten.
Dann ist $C[\underline{D}]$ eine epireflektive Unterkategorie von $\underline{C}$.

(4) Ist $\underline{E}$ eine topologische Kategorie, so ist die Eigenschaft (a) in (3) stets erfüllt.

Beweis: zu 1

$p_i:(X,\xi)\longrightarrow(Y_i,\eta_i)$ bezeichne die i-te Projektion, $m_X:(X,\xi)_C\longrightarrow(X,\xi)$ sowie $m_{Y_i}:(Y_i,\eta_i)_C\longrightarrow(Y_i,\eta_i)$ die universellen Bimorphismen. Sei nun $(Z,\zeta)\in\underline{C}$ und $(g_i:(Z,\zeta)\longrightarrow(Y_i,\eta_i)_C)_{i\in I}$ eine Familie von Morphismen. Dann ist die eindeutige Existenz eines Morphismus $f':(Z,\zeta)\longrightarrow(X,\xi)_C$ zu zeigen, so daß für alle $i\in I$ stets $g_i = C(p_i)\circ f'$ gilt.



Da (X,ξ) das $\underline{E}$-Produkt der Familie $(Y_i,\eta_i)_{i\in I}$ ist, existiert zu der Familie $(m_{Y_i}\circ g_i:(Z,\zeta)\longrightarrow(Y_i,\eta_i))_{i\in I}$ ein eindeutiger Morphismus $f:(Z,\zeta)\longrightarrow(X,\xi)$, so daß für alle $i\in I$ stets $m_{Y_i}\circ g_i = p_i\circ f$ gilt. Auf Grund der universellen Eigenschaft von m_X existiert nun ein Morphismus $f':(Z,\zeta)\longrightarrow(X,\xi)_C$ mit $m_X\circ f' = f$.

Für alle $i\in I$ gilt nun

$m_{Y_i}\circ g_i = p_i\circ f = p_i\circ m_X\circ f' = m_{Y_i}\circ C(p_i)\circ f'$, also

$g_i = C(p_i)\circ f'$, da m_{Y_i} ein Monomorphismus ist.

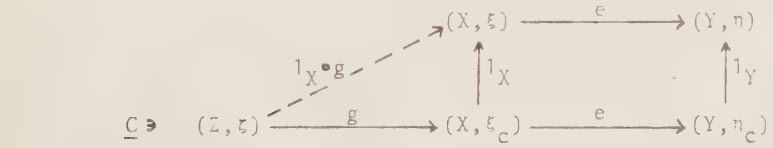
f' ist auch eindeutig bestimmt durch diese Eigenschaft, denn gelte auch für $k:(Z,\zeta)\longrightarrow(X,\xi)_C$ und alle $i\in I$ $g_i = C(p_i)\circ k$. Dann folgt $f = m_X\circ f' = m_X\circ k$. Da m_X ein Monomorphismus ist, erhält man $f' = k$.

zu (2)

Wegen 1.1.2(1) und 1.1.2(2) läßt C die unterliegenden Mengen unverändert. Statt $(X,\xi)_C$ und $(Y,\eta)_C$ schreiben wir deshalb (X,ξ_C) und (Y,η_C).

Sei $e:(X,\xi)\longrightarrow(Y,\eta)$ eine $\underline{E}$-Einbettung. Dann ist wegen 1.1.2(3) nur zu zeigen, daß ξ_C die $\underline{C}$-initiale Struktur auf X bzgl. $e:X\longrightarrow Y$ und (Y,η_C) ist.

Für ein $\underline{C}$-Objekt (Z,ζ) und eine Abbildung $g:Z\longrightarrow X$ muß demnach gezeigt werden, daß $g:(Z,\zeta)\longrightarrow(X,\xi_C)$ ein Morphismus ist, wenn es $e\circ g:(Z,\zeta)\longrightarrow(Y,\eta_C)$ ist.



Ist $e\circ g:(Z,\zeta)\longrightarrow(Y,\eta_C)$ ein Morphismus, so auch $1_Y\circ e\circ g:(Z,\zeta)\longrightarrow(Y,\eta)$. Es folgt,daß $1_X\circ g:(Z,\zeta)\longrightarrow(X,\xi)$

ein Morphismus ist, und somit auch $g:(Z,\zeta)\longrightarrow(X,\xi_C)$, da $(Z,\zeta)\in\underline{C}$.

zu (3)

Es ist zu zeigen, daß $C[\underline{D}]$ abgeschlossen ist bzgl. $\underline{C}$-Produkten und $\underline{C}$-Unterobjekten.
Sei $((Y_i,\eta_i)_C)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten in $C[\underline{D}]$, bzw. $(Y_i,\eta_i)_{i\in I}$ eine Familie von $\underline{D}$-Objekten. Das $\underline{D}$-Produkt (X,ξ) der Familie $(Y_i,\eta_i)_{i\in I}$ ist identisch mit dem $\underline{E}$-Produkt derselben Familie, und mit (1) folgt nun, daß $(X,\xi)_C\in C[\underline{D}]$ das $\underline{C}$-Produkt der Familie $((Y_i,\eta_i)_C)_{i\in I}$ ist. Damit ist $C[\underline{D}]$ abgeschlossen bzgl. $\underline{C}$-Produkten. Die Aussage folgt nun direkt aus der Voraussetzung (a).

zu (4)

Sei $(Y,\eta)\in\underline{D}$, also $(Y,\eta)_C\in C[\underline{D}]$ und $(X,\xi)\in\underline{C}$ ein $\underline{C}$-Unterobjekt von $(Y,\eta)_C$. Da $\underline{C}$ als bicoreflektive Unterkategorie einer topologischen Kategorie selbst wieder eine topologische Kategorie ist, folgt aus 1.1.2(3), daß ξ die $\underline{C}$-initiale Struktur auf X bzgl. der Einbettung $e:(X,\xi)\longrightarrow(Y,\eta)_C$ ist. Versieht man X nun mit der $\underline{E}$-initialen Struktur ζ bzgl. $e:X\longrightarrow(Y,\eta)$, so gilt $(X,\zeta)\in\underline{D}$ und wegen (2) $(X,\zeta)_C=(X,\xi)$. Also ist $(X,\xi)\in C[\underline{D}]$ •

Die duale Aussage zu 1.3.1 charakterisiert die Coprodukt- und Quotientenbildung in einer bireflektiven Unterkategorie.

1.3.2 Satz: Sei $\underline{A}$ eine topologische Kategorie (1.1.1). $\underline{C}$ sei eine bicoreflektive Unterkategorie von $\underline{A}$ mit Bicoreflektor C, und $\underline{K}\subset\underline{A}$. Dann kommutiert die Operation der bireflektiven Hüllenbildung mit C:

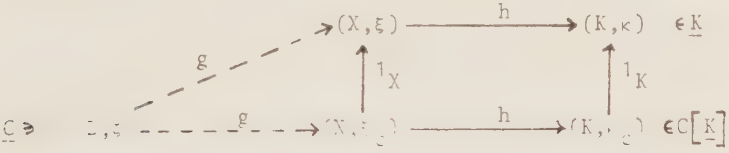
$$BH_{\underline{C}}(C[\underline{K}]) = C[BH_{\underline{A}}(\underline{K})] .$$

Beweis: "$\subset$"

$BH_{\underline{A}}(\underline{K})$ ist eine bireflektive Unterkategorie von $\underline{A}$ mit $\underline{K} \subset BH_{\underline{A}}(\underline{K})$. Es folgt $C[\underline{K}] \subset C[BH_{\underline{A}}(\underline{K})]$, und wegen ([26] A.11(5)) ist $C[BH_{\underline{A}}(\underline{K})]$ eine bireflektive Unterkategorie von $\underline{C}$. Also ist $BH_{\underline{C}}(C[\underline{K}]) \subset C[BH_{\underline{A}}(\underline{K})]$.

"$\supset$"

Sei $(X,\xi_c) \in C[BH_{\underline{A}}(\underline{K})]$, also $(X,\xi) \in BH_{\underline{A}}(\underline{K})$.
Wegen Satz 1.1.4 ist zu zeigen, daß ξ_c die $\underline{C}$-initiale Struktur auf X bzgl. der Klasse $\mathcal{F}_{\xi_c}$ aller Morphismen in $C[\underline{K}]$-Objekte ist.
Sei also $(Z,\zeta) \in \underline{C}$ und $g: Z \longrightarrow X$ eine Abbildung, so daß für alle $f \in \mathcal{F}_{\xi_c}$ $f \circ g$ ein Morphismus ist. Ist dann $h: (X,\xi) \longrightarrow (K,\kappa)$ ein Morphismus, wo $(K,\kappa) \in \underline{K}$, so folgt $h \in \mathcal{F}_{\xi_c}$.



Deshalb ist $(Z,\zeta) \xrightarrow{g} (X,\xi_c) \xrightarrow{h} (K,\kappa_c)$ ein Morphismus, und somit auch $(Z,\zeta) \xrightarrow{g} (X,\xi) \xrightarrow{h} (K,\kappa)$.
Da ξ $\underline{A}$-initial ist bzgl. der Klasse aller Morphismen in $\underline{K}$-Objekte, folgt aus 1.1.4, daß $g: (Z,\zeta) \longrightarrow (X,\xi)$ ein Morphismus ist. Nun folgt leicht, daß auch $g: (Z,\zeta) \longrightarrow (X,\xi_c)$ ein Morphismus ist, was $(X,\xi_c) \in BH_{\underline{C}}(C[\underline{K}])$ bedingt •

1.3.3 Dualer Satz: $\underline{B}$ sei eine bireflektive Unterkategorie von $\underline{A}$ mit B als Bireflektor, $\underline{K} \subset \underline{A}$. Dann kommutiert die Operation der bicoreflektiven Hüllenbildung mit B :

$$CH_{\underline{B}}(B[\underline{K}]) = B[CH_{\underline{A}}(\underline{K})] \ .$$

1.3.4 Beispiel: Die bireflektive Hülle der pseudometrisierbaren uniformen Räume in Near ist U-Near ([23], [32]). Bezeichnet T den topologischen Bicoreflektor, so folgt: Die bireflektive Hülle von $T[\{$pseudometrisierbare uniforme Räume$\}]$ in T-Near ist $T[\text{U-Near}]$, d.h. die bireflektive Hülle in T-Near der pseudometrisierbaren topologischen Räume ist die Klasse der T_{3a}-Räume.

Ein zu 1.3.2 gleicher Satz läßt sich auch für die epireflektive Hülle ableiten.

1.3.5 Satz: Sei $\underline{A}$ eine topologische Kategorie und $\underline{E}$ eine epireflektive Unterkategorie von $\underline{A}$.
$\underline{C}$ sei eine bicoreflektive Unterkategorie von $\underline{E}$ mit C als Bicoreflektor und folgenden Eigenschaften:
(a) Für jede epireflektive Unterkategorie $\underline{D}$ von $\underline{E}$ ist $C[\underline{D}]$ abgeschlossen bzgl. $\underline{C}$-Unterobjekten.
(b) Das Bild $C(e)$ eines extremen Monomorphismus e in $\underline{E}$ unter C ist stets ein extremer Monomorphismus in $\underline{C}$.
$\underline{K}$ sei eine Klasse von $\underline{E}$-Objekten. Dann kommutiert die Operation der epireflektiven Hüllenbildung mit C:

$$EH_{\underline{C}}(C[\underline{K}]) = C[EH_{\underline{E}}(\underline{K})] \ .$$

Beweis: "$\subset$"
$EH_{\underline{E}}(\underline{K})$ ist eine epireflektive Unterkategorie von $\underline{E}$ mit $\underline{K} \subset EH_{\underline{E}}(\underline{K})$. Es folgt $C[\underline{K}] \subset C[EH_{\underline{E}}(\underline{K})]$. Gemäß Lem-

ma 1.3.1(3) ist $C[EH_{\underline{E}}(\underline{K})]$ eine epireflektive Unterkategorie von $\underline{C}$. Also ist $EH_{\underline{C}}(C[\underline{K}]) \subset C[EH_{\underline{E}}(\underline{K})]$.

Sei $(X,\xi_C) \in C[EH_{\underline{E}}(\underline{K})]$ (,,$\supset$''), also $(X,\xi) \in EH_{\underline{E}}(\underline{K})$. Dann existiert eine Menge $(Y_i, n_i)_{i\in I}$ von $\underline{K}$-Objekten und ein extremer Monomorphismus in $\underline{E}$ $e:(X,\xi) \longrightarrow (Y,\eta)$ in das $\underline{E}$-Produkt dieser Familie, das mit (Y,η) bezeichnet wird.

$$\begin{array}{ccccc} EH_{\underline{E}}(\underline{K}) \ni (X,\xi) & \xrightarrow{\ e\ } & (Y,\eta) & \xrightarrow{\ p_i\ } & (Y_i,\eta_i) \in \underline{K} \\ {\scriptstyle m_X}\uparrow & & {\scriptstyle m_Y}\uparrow & & {\scriptstyle m_{Y_i}}\uparrow \\ (X,\xi)_C & \xrightarrow{\ C(e)\ } & (Y,\eta)_C & \xrightarrow{\ C(p_i)\ } & (Y_i,\eta_i)_C \end{array}$$

Für $i\in I$ bezeichnet $p_i:(Y,\eta) \longrightarrow (Y_i,\eta_i)$ die i-te Projektion. Gemäß Lemma 1.3.1(1) ist $(Y,\eta)_C$ das $\underline{C}$-Produkt der Familie $((Y_i,\eta_i)_C)_{i\in I}$ und nach Voraussetzung (b) ist $C(e):(X,\xi)_C \longrightarrow (Y,\eta)_C$ eine $\underline{C}$-Einbettung. Es folgt, daß $(X,\xi)_C \in EH_{\underline{C}}(C[\underline{K}])$ ist •

Ist im obigen Satz $\underline{E}$ eine topologische Kategorie, was insbesondere dann erfüllt ist, wenn $\underline{E} = \underline{A}$, dann sind gemäß 1.3.1(4) und 1.3.1(2) die Voraussetzungen (a) und (b) stets erfüllt. In diesem Fall besteht also eine uneingeschränkte Gültigkeit der obigen Kommutativität.

Der folgende Satz gleicht in der Art den vorausgehenden. Als Hüllenoperation wird jedoch die Unterraumbildung (1.1.9) verwendet.

1.3.6 Satz: $\underline{C}$ sei eine bicoreflektive Unterkategorie einer topologischen Kategorie $\underline{A}$ mit gleichnamigem Bicoreflektor C, $\underline{K} \subset \underline{A}$. Dann kommutiert die Operation Unterraumhüllen-Bildung mit C:

$$C[\mathrm{Sub}_{\underline{A}}(\underline{K})] = \mathrm{Sub}_{\underline{C}}(C[\underline{K}]) \ .$$

Beweis: Die Behauptung folgt aus 1.3.1 •

Eine erhebliche Bedeutung kommt im Rahmen der Nearness-Kategorien einer Arbeit von H.Müller [44] zu, die leider nicht veröffentlicht wurde. Sie behandelt Situationen, die durch das Verhältnis der Kategorien PNear, SNear, HNear und Near zueinander motiviert werden könnten (1.2.3).

1.3.7 Satz [44]: Sei $\underline{A}$ eine topologische Kategorie, $\underline{C}$ eine bicoreflektive Unterkategorie und $\underline{E}$ eine epireflektive Unterkategorie von $\underline{A}$ mit jeweils gleichnamigen Reflektoren. $\underline{D} := \underline{E} \cap \underline{C}$ bezeichne den Schnitt der Unterkategorien. Dann gilt:

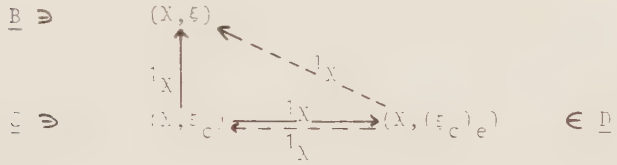
(1) Ist $E[\underline{C}] \subset \underline{C}$ oder $C[\underline{E}] \subset \underline{E}$, dann ist

(a) $\underline{D}$ eine epireflektive Unterkategorie von $\underline{C}$ mit E als Epireflektor, und

(b) $\underline{D}$ eine bicoreflektive Unterkategorie von $\underline{E}$ mit C als Bicoreflektor.

(2) Ist $\underline{E}$ sogar eine bireflektive Unterkategorie von $\underline{A}$, so ist $\underline{D}$ eine bireflektive Unterkategorie von $\underline{C}$ mit E als Bireflektor.

Beweis: zu (1)
Gelte $E[\underline{C}] \subset \underline{C}$. Wegen $E[\underline{C}] \subset \underline{E}$ folgt dann $E[\underline{C}] \subset \underline{E} \cap \underline{C} = \underline{D}$. Aus $\underline{D} \subset E[\underline{C}]$ ergibt sich $E[\underline{C}] = \underline{D}$, woraus man (a) erhält.
Ist nun $(X,\xi) \in \underline{E}$, also $(X,\xi_c) \in C[\underline{E}] \subset \underline{C}$, dann folgt aus $E[\underline{C}] \subset \underline{C}$ $(X,(\xi_c)_e) \in \underline{D}$.



Zweimalige Ausnutzung der universellen Eigenschaften ergibt die Gleichheit von ξ_c und $(\xi_c)_b$. Man erhält $C[\underline{E}] \subset \underline{E}$, was mit $C[\underline{E}] = \underline{D}$ dann (b) ergibt.

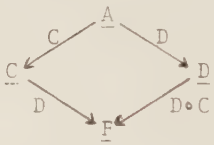
zu (2)
Die $\underline{A}$-Bimorphismen zwischen $\underline{C}$-Objekten sind gerade die $\underline{C}$-Bimorphismen •

Dieser Satz wird vor allem im zweiten Kapitel sehr nützlich sein. Ein ähnlicher, jedoch recht einfacher Sachverhalt gilt für den Schnitt von zwei bicoreflektiven Unterkategorien.

1.3.8 Satz: $\underline{C}$ und $\underline{D}$ seien bicoreflektive Unterkategorien einer topologischen Kategorie $\underline{A}$ mit gleichnamigen Bicoreflektoren. $\underline{F} := \underline{C} \cap \underline{D}$ bezeichne den Schnitt der beiden Unterkategorien. Dann gilt:

(1) $\underline{F}$ ist eine bicoreflektive Unterkategorie von $\underline{C}$, $\underline{D}$ und $\underline{A}$.

(2) Gilt $D[\underline{C}] \subset \underline{C}$, so ist D der Bicoreflektor von $\underline{F}$ in $\underline{C}$, und $D \circ C$ ist der Bicoreflektor von $\underline{F}$ in $\underline{D}$ und $\underline{A}$.



Beweis: (1) ist klar. Zu (2): Aus $D[\underline{C}] \subset \underline{C}$ folgt $D[\underline{C}] = \underline{F}$, und D muß deshalb der zu $\underline{F}$ gehörige Bicoreflektor in $\underline{C}$ sein. Man weist nun auf direktem Wege nach, daß $D \circ C$ der zu $\underline{F}$ gehörige Bicoreflektor in $\underline{D}$ ist.

Kapitel 2

Topologische Praenearness-Räume

§ 2.1 Der Funktor T

Wir schließen uns hier der Konvention an, unter einem topologischen Raum stets einen symmetrischen topologischen Raum zu verstehen. Das bringt im Zusammenhang mit Nearness-Räumen eine sprachliche Vereinfachung mit sich. Dabei heißt ein topologischer Raum symmetrisch, wenn er das Axiom (H.0) der nachfolgenden Definition erfüllt. Da im Folgenden auch Verallgemeinerungen des Begriffs des topologischen Raumes betrachtet werden, erweitern wir unsere Konvention dahin, daß wir für alle diese Begriffe stets das Axiom (H.0) voraussetzen.

2.1.1 Definition: Sei X eine Menge und $h: \mathfrak{P}^2(X) \longrightarrow \mathfrak{P}^2(X)$ eine Abbildung. Man betrachtet die folgenden Axiome:

(H.0) $h\{x\} \cap hA \neq \emptyset \Rightarrow x \in hA$
(H.1) $h\emptyset = \emptyset$
(H.2) $A \subset hA$
(H.3) $A \subset B \Rightarrow hA \subset hB$
(H.4) $h(A \cup B) = hA \cup hB$
(H.5) $hhA \subset hA$.

(1) h heißt Prae-Hüllen-Operator und (X,h) ein praetopologischer Raum, wenn h die Axiome (H.0)--(H.3) erfüllt.

(2) h heißt Semi-Hüllen-Operator und (X,h) ein semitopologischer Raum, wenn h die Axiome (H.0)--(H.4) erfüllt.

(3) h heißt Hemi-Hüllen-Operator und (X,h) ein hemitopologischer Raum, wenn h die Axiome (H.0)--(H.3),(H.5) erfüllt.

(4) h heißt Top-Hüllen-Operator und (X,h) topologischer Raum, wenn h die Axiome (H.0)-(H.5) erfüllt.

2.1.2 Bemerkung: Semitopologische Räume werden im Buch von E.Čech [8] ausführlich behandelt.
Prae- und hemitopologische Räume wurden in dieser Form von M.S.Hastings betrachtet [17].
Das Axiom (H.0) geht auf N.A.Shanin [49] und A.S.Davis [10] zurück.

Die im Folgenden betrachteten Kategorien und Funktoren werden im Diagramm 2.1.32 zur Übersicht dargestellt.

2.1.3 Definition ([17] 4.7) : Ein PN-Raum (X,ξ) heißt topologisch, falls er die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

(T) $\mathcal{A} \in \xi \Leftrightarrow \bigcap \mathrm{cl}_\xi \mathcal{A} = \emptyset$.

(T') $\mathcal{A} \in \xi \Leftrightarrow \bigcup \mathrm{int}_\xi \mathcal{A} = X$.

Die Unterkategorie der topologischen PN-Räume wird mit T-PNear, die der topologischen SN-Räume mit T-SNear die der topologischen HN-Räume mit T-HNear und die der topologischen N-Räume mit T-Near bezeichnet

2.1.4 Bemerkung: (1) Wir nennen die obigen Kategorien topologisch, weil sie in umkehrbar eindeutiger Beziehung zu den in 2.1.1 definierten Klassen von Hüllenräumen stehen [17]. Diese umkehrbare Zuordnung Z hat folgende Gestalt:
Jedem topologischen PN-Raum (X,ξ) wird der Prae-Hüllen-Operator

$$cl_\xi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$
$$A \longmapsto \{x \in X \mid (\{x\}, A) \in \xi\}$$

zugewiesen. Ist (X,ξ) ein SN-Raum (HN-Raum,N-Raum), so ist (X,cl_ξ) ein semitopologischer (hemitopologischer, topologischer) Raum.

Die Gestalt von Z^{-1} :

Jedem praetopologischen Raum (X,h) wird durch

$$\mathcal{A} \in \xi \quad :\Leftrightarrow \quad \bigcap h\mathcal{A} = \bigcap \{hA \mid A \in \mathcal{A}\} \neq \emptyset$$

ein topologischer PN-Raum (X,ξ) zugeordnet. Ist h ein Semi- (Hemi-, Top-) Hüllen-Operator, so ist (X,ξ) ein topologischer SN-Raum (HN-Raum, N-Raum).

(2) Es ist bekannt ([26]4.4), daß im Fall der topologischen Räume die Zuordnung Z eine Einbettung in die Kategorie Near darstellt. Die resultierende Unterkategorie T-Near ist isomorph zur Kategorie der symmetrischen topologischen Räume und stellt eine bicoreflektive Unterkategorie von Near dar mit dem zugehörigen Bicoreflektor T . Dies macht es möglich, jedem N-Raum einen topologischen Raum zuzuordnen, den man den unterliegenden topologischen Raum nennt.

(3) Wie Beispiel 1 des Anhangs zeigt, ist
- T-PNear keine bicoreflektive Unterkategorie von PNear , und
- T-SNear keine bicoreflektive Unterkategorie von SNear , wie in ([17]4.9(a),6.3(a)) irrtümlich behauptet wird. Es ist jedoch richtig, daß T-HNear eine bicoreflektive Unterkategorie von HNear ist ([17] 4.8(a)).

(4) So stellt sich das Problem, die Kate-

gorien T-PNear und T-SNear so in das Gefüge der Nearness-Kategorien einzubauen, daß sie als bicoreflektive Unterkategorien von möglichst großen umfassenden Kategorien dargestellt werden können, und damit eine Interpretation als "unterliegende" praetopologische bzw. semitopologische Räume zulassen.

(5) Ein weiteres Problem stellen die Beziehungen der unter 2.1.3 definierten Kategorien untereinander dar.

2.1.5 Definition: Sei X eine Menge und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$.

(1) $\operatorname{stack}\mathcal{A} := \{B \subset X \mid \exists\, A \in \mathcal{A} \text{ mit } A \subset B\}$.

(2) $\mathcal{A}$ heißt Stack, falls $\operatorname{stack}\mathcal{A} = \mathcal{A}$.

(3) $\mathcal{A}$ heißt Grill, falls für alle $A, B \in \mathcal{A}$ gilt:
(G.1) $\emptyset \notin \mathcal{A}$,
(G.2) $A \cup B \in \mathcal{A} \Leftrightarrow A \in \mathcal{A} \vee B \in \mathcal{A}$.

Der Begriff des Grills geht auf G.Choquet [9] zurück, Stacks wurden von G.Grimeisen betrachtet [15].

2.1.6 Definition: Ein PN-Raum heißt grillbestimmt, falls gilt:

(G) $\mathcal{A} \in \xi \Rightarrow \exists\, \mathcal{G} \in \xi$ Grill mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$.

Die Unterkategorie der grillbestimmtem Räume von PNear wird mit Grill bezeichnet.

2.1.7 Bemerkung: (1) Die Kategorie Grill wurde von W.A.Robertson [48] eingeführt. Sie ist isomorph zur Kategorie der filter merotopic spaces von M.Katětov [37].

(2) Grill ist eine bicoreflektive Unterkategorie von PNear mit

$$G:(X,\xi)\longmapsto(X,\xi_g)\ ,$$

wo $\mathcal{A}\in\xi_g :\Leftrightarrow \exists\, \mathcal{G}\in\xi$ Grill mit $\mathcal{A}\subset\mathcal{G}$, als Bireflektor.

(3) Jeder grillbestimmte PN-Raum ist ein SN-Raum. Somit ist Grill eine bicoreflektive Unterkategorie von S-Near mit G als Bicoreflektor.

2.1.8 Definition: Ein PN-Raum (X,ξ) heißt lokalisiert, wenn für alle nichtleeren $\mathcal{A}\subset\mathfrak{P}(X)$ die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

(L) $\mathcal{A}\in\xi \Rightarrow \exists\, x\in X$ mit $\mathcal{A}\cup\{\{x\}\}\in\xi$,

(L') $(\forall\, x\in X\ \ \mathcal{A}\cup\{X\setminus\{x\}\}\in\xi) \Rightarrow \mathcal{A}\in\xi$.

Die Unterkategorie der lokalisierten PN-Räume von PNear wird mit PConv bezeichnet, die der lokalisierten SN-Räume mit SConv , und die der lokalisierten grillbestimmten Räume mit Conv .

2.1.9 Bemerkung: (1) Die Klasse der lokalisierten grillbestimmten Räume wurde von W.A.Robertson [48] eingeführt. Conv ist isomorph zur Kategorie der localized filter merotopic space von M.Katětov [37] und isomorph zur Kategorie der Konvergenzräume im Sinne von D.Kent [39].

(2) Der Begriff "lokalisiert" wurde von M.Katětov [37] vorgeschlagen.

(3) Conv ist eine bicoreflektive Unterkategorie von Grill mit

$$T:(X,\xi)\longmapsto(X,\xi_t)\ ,$$

wobei $\mathcal{A}\in\xi_t :\Leftrightarrow \exists\, x\in X$ mit $\mathcal{A}\cup\{\{x\}\}\in\xi$, als Bico-

reflektor [48]. Diese Aussage läßt sich auf lokalisierte PN-Räume übertragen, wie der folgende Satz zeigt.

2.1.10 Satz: PConv ist eine bicoreflektive Unterkategorie von PNear. Der zugehörige Bicoreflektor ist gegeben durch:

$$\Gamma:(X,\xi)\longmapsto(X,\xi_t)\ ,$$

wobei $\mathcal{A}\in\xi_t :\Leftrightarrow \exists\, x\in X$ mit $\mathcal{A}\cup\{\{x\}\}\in\xi$.

Für alle $A\subset X$ gilt dann stets: $cl_{\xi}A = cl_{\xi_t}A$.

Beweis: Die Behauptungen des Satzes folgen aus den nachstehenden Aussagen:

(1) Γ ist ein Funktor.

Offenbar ist (X,ξ_t) stets ein lokalisierter PN-Raum, so daß $1_X:(X,\xi_t)\longrightarrow(X,\xi)$ eine N-stetige Abbildung ist. Ist nun $f:(X,\xi)\longrightarrow(Y,\eta)$ ein Morphismus und $\mathcal{A}\in\xi_t$, so existiert ein $x\in X$ mit $\mathcal{A}\cup\{\{x\}\}\in\xi$. Es folgt $f\mathcal{A}\cup\{\{f(x)\}\}\in\eta$, also $f\mathcal{A}\in\eta_t$.

(2) $(X,\xi)=(X,\xi_t)$ ist genau dann erfüllt, wenn (X,ξ) ein lokalisierter PN-Raum ist.

(3) $x\in cl_{\xi}A \Leftrightarrow (x,A)\in\xi \Leftrightarrow (x,A)\in\xi_t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in cl_{\xi_t}A$.

2.1.11 Lemma:

(1) $G[\underline{PConv}]\subset \underline{PConv}$,

(2) $T[\underline{SNear}]\subset \underline{SNear}$,

(3) $T[\underline{Grill}]\subset \underline{Grill}$.

Beweis: zu (1)

Sei $(X,\xi)\in$ PConv und $\alpha\in\xi_g$. Dann existiert ein ξ-Grill $\mathcal{G}$, d.h. ein Grill $\mathcal{G}$ mit $\mathcal{G}\in\xi$, der α enthält. Weiterhin existiert ein $x\in X$ mit $\mathcal{G}\cup\{\{x\}\}\in$ Sei $\mathcal{F} := \mathrm{stack}(\mathcal{G}\cup\{\{x\}\})$. Dann ist $\mathcal{F}$ ein ξ-Grill, und da $\alpha\cup\{x\}\subset\mathcal{F}$ folgt $\alpha\cup\{x\}\in\xi_g$.

zu (2)

Sei $(X,\xi)\in$ PConv. $\alpha,\beta\subset\mathcal{P}(X)$ mit $\alpha\notin\xi_t$ und $\beta\notin\xi_t$. Dann gilt für alle $x\in X$ $\alpha\cup\{\{x\}\}\notin\xi$ und $\beta\cup\{\{x\}\}\notin\xi$. Es folgt für alle $x\in X$, daß $(\alpha\vee\beta)\cup\{\{x\}\}\in$, da $\alpha\cup\{\{x\}\}\vee\beta\cup\{\{x\}\}\ll(\alpha\vee\beta)\cup\{\{x\}\}$. Also ist $\alpha\vee\beta\notin\xi_t$.

zu

Sei $(X,\xi)\in$ PConv und $\alpha\in\xi_t$. Dann existiert ein $x\in$ mit $\alpha\cup\{\{x\}\}\in$ und ein ξ-Grill $\mathcal{G}$ mit $\alpha\cup\{x\}\subset\mathcal{G}$. Offenbar ist dann $\mathcal{G}$ auch ein ξ_t-Grill mit $\alpha\subset\mathcal{G}$.

2.1.12 Korollar:

1) SConv = SNear ∩ PConv,
2) SConv ist eine bicoreflektive Unterkategorie von mit T als Bicoreflektor,
3) SConv ist eine bicoreflektive Unterkategorie von PConv mit as Bicoreflektor.

Beweis: 1.3.8, 2.1.10, 2.1.11 •

2.1.13 Korollar:

(1) Conv = Grill ∩ PConv,
(2) Conv ist eine bicoreflektive Unterkategorie von Grill mit T als Bicoreflektor([4],[48]),
(3) Conv ist eine bicoreflektive Unterkategorie von SConv und PConv mit G als Bicoreflektor.

Beweis: 1.3.8, 2.1.10, 2.1.11 •

In ([17]4.15) wird ausgeführt, daß jeder PN-Raum Unterraum eines topologischen PN-Raumes ist. Diese Aussage ist jedoch nicht richtig, wie Beispiel 1 des Anhangs und das folgende Lemma zeigen.

2.1.14 Lemma: Es sei $(X,\xi)\in$PNear , $(Y,\eta)\in$I-PNear und $i:(X,\xi)\longrightarrow(Y,\eta)$ eine PN-Einbettung. Dann gilt für $\mathcal{A}\subset\mathfrak{P}X$:

(A) $\quad \bigcap \mathrm{cl}_\xi \mathcal{A} \neq \phi \Rightarrow \mathcal{A}\in\xi$.

Beweis: Es existiert ein $x\in X$ mit $x\in\bigcap\mathrm{cl}_\xi\mathcal{A}$. Da i PN-stetig ist, folgt $i(x)\in\bigcap\mathrm{cl}_\eta i\mathcal{A}$. Weil (Y,η) ein topologischer PN-Raum (2.1.3) ist, erhält man $i\mathcal{A}\in\eta$. Nun benutzt man, daß ξ PNear-initial ist (vgl. [17] 4.14 (2)), d.h. $\mathcal{A}\subset\mathfrak{P}X$, $i\mathcal{A}\in\eta$ gilt. Es ergibt sich $\mathcal{A}\in\xi$.

Der PN-Raum (Y,η) aus Beispiel 1 des Anhangs erfüllt (A) jedoch nicht, obwohl er ein Unterraum eines topologischen PN-Raumes ist. [illegible] zu untersuchen:

2.1.15 Definition: (1) Die Unterkategorie A-PNear von PNear bestehe aus jenen PN-Räumen (X,ξ) , die den folgenden äquivalenten Bedingungen genügen:

(A) $\quad \bigcap \mathrm{cl}_\xi \mathcal{A} \neq \phi \Rightarrow \mathcal{A}\in\xi$.

(A') $\quad \mathcal{A}\in\xi \Rightarrow \bigcup \mathrm{int}_\xi \mathcal{A} = X$.

(2) A-SNear sei die Unterkategorie von SNear , deren Objekte der Bedingung (A) genügen.

(3) A-Grill sei die Unterkategorie von Grill , deren Objekte der Bedingung (A) genügen.

2.1.16 Satz: A-PNear ist eine bireflektive Unterkategorie von PNear mit

$$A:(X,\xi)\longmapsto(X,\xi_a)$$

als Bireflektor, wobei ξ_a durch einen transfiniten Prozeß definiert wird. Für $A\subset X$, α Ordinalzahl sei

$$h^0A := cl_\xi A ,$$

$$h^{\alpha+1}A := \{x\in X \mid h^\alpha\{x\}\cap h^\alpha A \neq \emptyset\} ,$$

und falls β eine Limesordinalzahl ist, sei

$$h^\beta A := \bigcup_{\alpha<\beta} h^\alpha A .$$

Man setzt nun $hA := \bigcup_{\alpha\in Ord} h^\alpha A$, und definiert für

$\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(X)$: $\mathcal{A}\in\xi_a :\Leftrightarrow \bigcap h\mathcal{A} = \bigcap\{hA \mid A\in\mathcal{A}\} \neq \emptyset$ oder $\mathcal{A}\in\xi$.

Beweis: Um den Beweisgang zu vereinfachen und um es zu ermöglichen, an späterer Stelle auf Aussagen innerhalb des Beweise zu verweisen, sollen einzelne in sich geschlossene Aussagen als Zwischenbehauptungen formuliert und mitsamt ihrem Beweis durch Klammern

(Zwischenbehauptung
  Zwischenbeweis)

aus der Abfolge der Schlüße herausgezogen werden.

(Z.-Beh.1: Der Operator h genügt den Axiomen (H.1)-(H.3) und (H.0) aus Definition 2.1.1.

Z.-Bew.:

(H.1) Man hat $h^0\emptyset = cl_\xi\emptyset = \emptyset$, woraus für alle $\alpha\in Ord$ folgt: $h^\alpha\emptyset = \emptyset$. Das ergibt $h\emptyset = \emptyset$.

(H.2) Sei $A\subset B$. Dann folgt $cl_\xi A\subset cl_\xi B$, was $h^0A\subset h^0B$ ergibt. Sei nun $\beta\in Ord$ und es gelte für alle $\alpha<\beta$: $h^\alpha A\subset h^\alpha B$.
Ist β eine Limesordinalzahl, folgt $h^\beta A\subset h^\beta B$.
Andernfalls gilt:
$x\in h^\beta A \Rightarrow h^{\beta-1}\{x\}\cap h^{\beta-1}A \neq \emptyset \Rightarrow h^{\beta-1}\{x\}\cap h^{\beta-1}B \neq \emptyset$,
was $x\in h^\beta B$ ergibt.

(H.3) $A \subset cl_{\xi} A \subset h^0 A \subset \bigcup_{\alpha \in Ord} h^\alpha A \subset hA$.

(H.0) Offenbar gilt für alle $\alpha \in Ord$ und $A \subset X$ stets $h^\alpha A \subset h^{\alpha+1} A$, und falls β eine Limesordinalzahl ist, gilt $h^\alpha A \subset h^\beta A$ für alle $\alpha < \beta$.
Für jedes $A \subset X$ existiert ein $\alpha(A) \in Ord$, so daß die Abbildung

$$\phi_A : Ord \longrightarrow \mathfrak{P}(X)$$
$$\alpha \longmapsto h^\alpha A$$

folgende Eigenschaft hat: Für jedes $\alpha' \in Ord$ mit $\alpha' \geq \alpha(A)$ ist $\phi_A(\alpha') = \phi_A(\alpha(A))$, denn ϕ_A ist monoton und $\mathfrak{P}(X)$ ist eine Menge.
Gilt nun $h\{x\} \cap hA \neq \emptyset$ für ein $x \in X$ und $A \subset X$, folgt $h^{\alpha(\{x\})}\{x\} \cap h^{\alpha(A)} A \neq \emptyset$. Sei $\beta := \max\{\alpha(\{x\}), \alpha(A)\}$, dann ist $x \in h^{\beta+1} A \subset hA$.

(1) ξ_a ist eine PN-Struktur .

Zum Nachweis sind die Axiome (N.1)-(N.3) der Definition 1.2.1 zu überprüfen.

(N.1) Sei $\mathcal{A} \in \xi_a$ und $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$. Ist $\mathcal{A} \in \xi$, so auch $\mathcal{B}$, also $\mathcal{B} \in \xi_a$. Gilt $\bigcap h\mathcal{A} \neq \emptyset$, folgt wegen (H.2) $\bigcap h\mathcal{B} \neq \emptyset$, also $\mathcal{B} \in \xi_a$.

(N.3) Es ist $\xi_a \neq \emptyset$, da $\xi_a \supset \xi \neq \emptyset$. Es gilt $\{\emptyset\} \notin \xi$, da sonst aus (N.1) $\xi = \mathfrak{P}^2(X)$ folgen würde. Mit $h\emptyset = \emptyset$ erhält man somit $\{\emptyset\} \notin \xi_a$, also $\xi_a \neq \mathfrak{P}^2(X)$.

(N.2) Aus $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$ folgt mit (H.3) $\bigcap h\mathcal{A} \neq \emptyset$, was $\mathcal{A} \in \xi_a$ ergibt.

Z.-Beh.: Ist $(X,\xi) \in \underline{PNear}$, so gilt für alle $A \subset X$:

$$hA = cl_{\xi_a} A .$$

Z.-Beweis: Wegen (H.0) und (H.3) gilt für alle $x \in X$:

$$x \in hA \Leftrightarrow h\{x\} \wedge hA \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in cl_{\xi_a} A \ .$$

(2) $(X,\xi_a) \in$ A-PNear !

Die Gültigkeit des Axioms (A) der Definition 2.1.15 ist zu zeigen. Sei also $\mathcal{A} \subset \mathfrak{P}(X)$ mit $\bigwedge cl_{\xi_a} \mathcal{A} \neq \emptyset$. Dann folgt aus 2.Beh.2 $\bigwedge h\mathcal{A} \neq \emptyset$, was $\mathcal{A} \in \xi_a$ bedingt.

(3) $(X,\xi) = (X,\xi_a) \Leftrightarrow (X,\xi) \in$ A-PNear !

"$\Rightarrow$" folgt aus (2).

"$\Leftarrow$" : Stets gilt $\xi_a \supset \xi$. Sei nun $\mathcal{A} \in \xi_a$. Wir nehmen an, daß $\bigwedge h\mathcal{A} \neq \emptyset$ ist. Für $A \subset X$ gilt nun

$$h^0 A = cl_\xi A \ , \text{ und}$$
$$h^1 A = \{x \mid cl_\xi \{x\} \wedge cl_\xi A \neq \emptyset\} = cl_\xi A \ ,$$

denn ξ ist eine A-PNear-Struktur.
Durch transfinite Induktion folgt

$$cl_\xi A = hA = cl_{\xi_a} A \ .$$

So folgt aus $\bigwedge h\mathcal{A} \neq \emptyset$, daß $\bigwedge cl_\xi \mathcal{A} \neq \emptyset$, also $\mathcal{A} \in \xi$.

(4) Universelle Eigenschaft !
Sei $(X,\xi) \in$ PNear , $(Y,\eta) \in$ A-PNear und

$$f : (X,\xi) \longrightarrow (Y,\eta)$$

eine N-stetige Abbildung. Es wird gezeigt, daß

$$f : (X,\xi_a) \longrightarrow (Y,\eta)$$

eine N-stetige Abbildung ist.

Sei $\mathcal{A} \in \xi_a$. Dann ist $\mathcal{A} \in \xi$ oder $\bigwedge h\mathcal{A} \neq \emptyset$. Gilt

Gilt $\alpha\in\xi$, so folgt $f\alpha\in\eta$. Gelte nun $\bigwedge h\alpha\neq\phi$.

Z.-Beh.3: Für alle $A\subset X$ ist $f[hA]\subset cl_\eta f[A]$.

Z.-Beweis: Durch transfinite Induktion:
$h^0A = cl_\xi A$, und da f eine N-stetige Abbildung ist, folgt $f[cl_\xi A]\subset cl_\eta f[A]$.
Gelte nun für alle $\alpha<\beta$: $f[h^\alpha A]\subset cl_\eta f[A]$. Sei $y\in f[h^\beta A]$. Dann existiert ein $x\in h^\beta A$ mit $f(x) = y$. Ist β eine Limesordinalzahl, so folgt: Es existiert ein $\alpha\in Ord$ mit $\alpha<\beta$ und $x\in h^\alpha A$, woraus gemäß der Induktions-Voraussetzung

$$y = f(x)\in cl_\eta f[A]$$

folgt. Ist β keine Limesordinalzahl, so gilt $h^{\beta-1}\{x\}\wedge h^{\beta-1}A\neq\phi$. Es folgt $f[h^{\beta-1}\{x\}]\wedge f[h^{\beta-1}A]\neq\phi$, und aus der Induktions-Voraussetzung erhält man nun $cl_\eta f(x)\wedge cl_\eta f[A]\neq\phi$. Weil $(Y,\eta)\in$ A-PNear folgt $\{\{y\},f[A]\}\in\eta$, das heißt $y\in cl_\eta f[A]$.

Nun folgt aus der vorausgehenden Z.-Behauptung $\phi\neq f[\bigwedge h\alpha]\subset\bigwedge\{f[hA]\mid A\in\alpha\}\subset\bigwedge cl_\eta f\alpha$, also $f\alpha\in\eta$, denn (Y,η) erfüllt (A) •

2.1.17 Bemerkung: Jeder HN-Raum (1.2.1(3)) erfüllt die Bedingung (A). HNear ist deshalb eine bireflektive Unterkategorie von A-PNear mit N als Bireflektor (1.2.3(11)).

2.1.18 Lemma: Die Funktoren S und A wurden unter 1.2.3(2) bzw. 2.1.16 angegeben. Sie erfüllen:

(1) $S[\text{A-PNear}]\subset\text{A-PNear}$,
(2) $A[\text{Grill}]\subset\text{Grill}$.

Beweis: zu (1)

Sei $(X,\xi)\in$A-PNear und $\mathcal{A}\in\widehat{\xi}_s$. Dann existieren $\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_n\in\widehat{\xi}$ mit $\mathcal{B}_1\wedge\cdots\wedge\mathcal{B}_n\prec\mathcal{A}$. Wie man leicht nachweist, gilt für $B_1\in\mathcal{B}_1$, ..., $B_n\in\mathcal{B}_n$ mit $B_1\cap\cdots\cap B_n\subset A$, $A\in\mathcal{A}$, stets

$$\mathrm{int}_\xi B_1\cap\cdots\cap\mathrm{int}_\xi B_n\subset\mathrm{int}_{\xi_s}A.$$

Da aber für jedes $\in\{1,\dots,n\}$ $\bigcup\mathrm{int}_\xi\mathcal{B}_i=X$, folgt $\bigcup\mathrm{int}_{\xi_s}\mathcal{A}=X$.

zu(2)

Sei $(X,\xi)\in$Grill und $\mathcal{A}\in\xi_a$. ξ_a ist gemäß 2.1.16 über einen Hüllenoperator h definiert. Es gilt $\bigcap h\mathcal{A}\neq\emptyset$ oder $\mathcal{A}\in\xi$. Ist $\mathcal{A}\in\xi$, so existiert ein ξ-Grill $\mathcal{G}$ mit $\mathcal{A}\subset\mathcal{G}$. $\mathcal{G}$ ist auch ein ξ_a-Grill.

Ist $\bigcap h\mathcal{A}\neq\emptyset$, so existiert ein $x\in X$ mit $x\in hA$ für alle $A\in\mathcal{A}$. Definiere $\mathcal{G}:=\{G\subset X\mid x\in hG\}$, dann gilt $\bigcap h\mathcal{G}\neq\emptyset$, also $\mathcal{G}\in\xi_a$. Wir zeigen nun, daß $\mathcal{G}$ ein Grill ist. Hierzu genügt der Nachweis, daß für beliebige $A,B\subset X$ stets $h(A\cup B)=hA\cup hB$ erfüllt ist. Wir beweisen dies durch transfinite Induktion:

(a) $h^0(A\cup B)=\mathrm{cl}_\xi(A\cup B)=\mathrm{cl}_\xi A\cup\mathrm{cl}_\xi B=h^0A\cup h^0B$.

(b) Für alle $\alpha<\beta$ gelte $h^\alpha(A\cup B)=h^\alpha A\cup h^\alpha B$.
Ist β eine Limesordinalzahl, so folgt aus $x\in h^\beta(A\cup B)=\bigcup_{\alpha<\beta}h^\alpha(A\cup B)$ die Existenz eines α mit $\alpha<\beta$ und $x\in h^\alpha(A\cup B)=h^\alpha A\cup h^\alpha B\subset h^\beta A\cup h^\beta B$.
Ist β keine Limesordinalzahl, erhält man folgende Inklusionen:
$x\in h^\beta(A\cup B)\Rightarrow h^{\beta-1}\{x\}\cap h^{\beta-1}(A\cup B)\neq\emptyset\Rightarrow$
$\Rightarrow h^{\beta-1}\{x\}\cap(h^{\beta-1}A\cup h^{\beta-1}B)\neq\emptyset\Rightarrow h^{\beta-1}\{x\}\cap h^{\beta-1}A\neq\emptyset$
oder $h^{\beta-1}\{x\}\cap h^{\beta-1}B\neq\emptyset\Rightarrow x\in h^\beta A\cup h^\beta B$.

Nun folgt, daß $\mathcal{G}$ ein Grill ist, der außerdem $\mathcal{A}\subset\mathcal{G}$ erfüllt •

2.1.19 Korollar:

(1) A-SNear = SNear $\cap$ A-PNear

(2) A-SNear ist eine bicoreflektive Unterkategorie von A-PNear mit S als Bicoreflektor,

(3) A-SNear ist eine bireflektive Unterkategorie von SNear mit A als Bireflektor.

Beweis: 1.3.7, 2.1.18(1) •

2.1.20 Korollar:

(1) A-Grill = Grill $\cap$ A-SNear .

(2) A-Grill ist eine bicoreflektive Unterkategorie von A-SNear und A-PNear mit G als Bicoreflektor,

(3) A-Grill ist eine bireflektive Unterkategorie von Grill mit A als Bireflektor.

Beweis: 1.3.7, 2.1.18(2) •

2.1.21 Lemma: Der Funktor T wurde unter 2.1.10 angegeben. Er erfüllt:

(1) $T[\text{A-PNear}] \subset \text{A-PNear}$,

(2) $T[\text{A-SNear}] \subset \text{A-SNear}$,

(3) $\text{T-SNear} \subset \text{Grill}$.

Beweis: zu (1)
Sei $(X,\xi) \in$ A-PNear . Für $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ mit $\bigcap cl_{\xi_t} \mathcal{A} \neq \emptyset$ ist zu zeigen, daß $\mathcal{A} \in \xi_t$. Es existiert ein $x \in \bigcap cl_{\xi_t} \mathcal{A}$, und da $cl_\xi = cl_{\xi_t}$ (2.1.10) folgt $x \in \bigcap cl_\xi \mathcal{A}$. Da (X,ξ) (A) erfüllt, folgt $\mathcal{A} \cup \{\{x\}\} \in \xi$, so daß man $\mathcal{A} \in \xi_t$ erhält.

zu (2)

Sei $(X,\xi) \in$ A-SNear. Dann gilt wegen (1) $(X,\xi_t) \in$ A-PNear und wegen 2.1.11(2) $(X,\xi_t) \in$ SNear . Es folgt $(X,\xi_t) \in$ A-PNear $\cap$ SNear = A-SNear .

zu (3)

Sei (X,ξ) ein topologischer SN-Raum und $\alpha \in \xi$. Dann existiert ein $x \in X$ mit $x \in \bigcap cl_\xi \alpha$. Definiert man $\mathfrak{g} := \{G \subset X \mid x \in cl_\xi G\}$, so ist $\mathfrak{g}$ ein ξ-Grill mit $\alpha \subset \mathfrak{g}$ •

2.1.22 Korollar:

(1) T-PNear = PConv $\cap$ A-PNear ,
(2) T-PNear ist eine bicoreflektive Unterkategorie von A-PNear mit T als Bicoreflektor,
(3) T-PNear ist eine bireflektive Unterkategorie von PConv mit A als Bireflektor.

Beweis: 1.3.7, 2.1.21(1) •

2.1.23 Korollar:

(1) T-SNear = Conv $\cap$ A-Grill ,
(2) T-SNear ist eine bicoreflektive Unterkategorie von A-Grill und A-SNear mit T als Bicoreflektor,
(3) T-SNear ist eine bicoreflektive Unterkategorie von T-PNear mit G als Bicoreflektor,
(4) T-SNear ist eine bireflektive Unterkategorie von Conv mit A als Bireflektor.

Beweis: zu (1)

T-SNear $\subset$ Grill $\cap$ T-PNear (2.1.21(3))
= Grill $\cap$ (PConv $\cap$ A-PNear) (2.1.22)
= (Grill $\cap$ PConv) $\cap$ (Grill $\cap$ A-PNear)
= Conv $\cap$ A-Grill (2.1.13, 2.1.20).

Ist umgekehrt $(X,\xi) \in \underline{Conv} \cap \underline{A\text{-}Grill}$, so ist $(X,\xi) \in \underline{S\text{-}Near}$ wegen 2.1.15(1) und 2.1.7(5). Es bleibt nur zu zeigen, daß (X,ξ) topologisch (2.1.3) ist. Gilt nun $\mathcal{A} \in \xi$, so existiert ein $x \in X$ mit $\mathcal{A} \cup \{\{x\}\} \in \xi$ (2.1.8), was $x \in \bigcap cl_\xi \mathcal{A}$ bedingt.
Ist $\bigcap cl_\xi \mathcal{A} \neq \emptyset$, so folgt aus (A) (2.1.15) $\mathcal{A} \in \xi$.

zu (2)

Aus (1) und der Definition von $\underline{T\text{-}SNear}$ (2.1.3) wird deutlich, daß
$\underline{T\text{-}SNear} = \underline{A\text{-}SNear} \cap \underline{T\text{-}PNear} = \underline{A\text{-}Grill} \cap \underline{T\text{-}PNear}$.
Mit 2.1.21(2) folgt aus 1.3.8, daß $\underline{T\text{-}SNear}$ eine bireflektive Unterkategorie von $\underline{A\text{-}SNear}$ ist. Wegen 2.1.21(3) und 2.1.20(2) folgt dann, daß $\underline{T\text{-}SNear}$ eine bicoreflektive Unterkategorie von $\underline{A\text{-}Grill}$ ist mit T als Bicoreflektor.

zu (3) und (4)

Aus (2) hat man $T[\underline{A\text{-}Grill}] = \underline{T\text{-}SNear} \subset \underline{A\text{-}Grill}$, was mit 1.3.7 die Aussage (4) bedingt. Nun folgt aus $A[\underline{Conv}] = \underline{T\text{-}SNear} \subset \underline{Conv}$ und 2.1.22(3) die Aussage (3).

2.1.24 Bemerkung: Gilt in einer Unterkategorie von $\underline{PNear}$ das Axiom (A), so nimmt dort der Funktor T seine bekannte Form an:

$$\mathcal{A} \in \xi_t \Leftrightarrow \bigcap cl_\xi \mathcal{A} \neq \emptyset .$$

2.1.25 Definition ([2],[26]) : Ein Nearness-Raum heißt subtopologisch, falls er ein N-Unterraum eines $\underline{T\text{-}Near}$-Objektes ist.
Die Unterkategorie der subtopologischen N-Räume wird mit $\underline{SubT\text{-}Near}$ bezeichnet.

2.1.26 Satz ([2],[26]) : Ein N-Raum ist genau subtopologisch, wenn er grillbestimmt ist.

2.1.27 Lemma: Die unter 1.2.3(1) und 2.1.10 angegebenen Funktoren N und T haben folgende Eigenschaften:

(1) $T[\text{HNear}] \subset \text{HNear}$,
(2) $N[\text{Grill}] \subset \text{A-Grill}$,
(3) $\text{T-Near} \subset \text{SubT-Near}$.

Beweis: zu (1)
Die Aussage ergibt sich unmittelbar aus der Definition.

zu (2)
Sei $(X,\xi) \in \text{Grill}$. Wegen 1.2.3(4) ist dann (X,ξ_n) ein N-Raum, der natürlich (A) erfüllt. Es bleibt nur zu zeigen, daß (X,ξ_n) grillbestimmt (2.1.6) ist.
Sei dazu $\mathcal{A} \in \xi_n$. Dann ist $h\mathcal{A} \in \xi$, wo h der in 1.2.3(1) definierte Hüllenoperator ist. Demnach existiert ein ξ-Grill $\mathcal{G}$ mit $h\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$. Definiere

$$\mathcal{F} := \{F \subset X \mid \exists\, G \in \mathcal{G} \text{ mit } G \subset hF\} .$$

Dann gilt $h\mathcal{F} \notin \mathcal{G}$, also $h\mathcal{F} \in \xi$ und damit $\mathcal{F} \in \xi_n$. Außerdem hat man $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ ist auch ein ξ_n-Grill, denn ist $A \cup B \in \mathcal{F}$, so existiert ein $G \in \mathcal{G}$ mit $G \subset h(A \cup B)$. Nun gilt aber $h(A \cup B) = hA \cup hB$, da h identisch ist mit dem von dem N-Raum induzierten Top-Hüllen-Operator (2.1.1) cl_{ξ_n} . Da $\mathcal{G}$ ein Grill ist, folgt nun $(G \cap hA) \in \mathcal{G}$ oder $(G \cap hB) \in \mathcal{G}$, also $A \in \mathcal{F}$ oder $B \in \mathcal{F}$.

zu (3)
Das ist trivial •

2.1.28 Korollar:

(1) $\text{Near} = \text{A-SNear} \cap \text{HNear}$,
(2) Near ist eine bicoreflektive Unterkategorie von HNear mit S als Bicoreflektor [17],
(3) Near ist eine bireflektive Unterkategorie von A-SNear und SNear mit N als Bireflektor [26].

Beweis:
(1) und (3) sind klar bzw. unter 1.2.3(5) aufgeführt.
(2) folgt aus (3) und 1.3.7 •

2.1.29 Korollar:
(1) SubT-Near = A-Grill ∩ Near
(2) SubT-Near ist eine bicoreflektive Unterkategorie von Near und HNear mit G als Bicoreflektor,
(3) SubT-Near ist eine bireflektive Unterkategorie von A-Grill und Grill mit N als Bireflektor.

Beweis: 1.3.7, 2.1.27(2) •

2.1.30 Korollar:
(1) T-HNear = T-PNear ∩ HNear ,
(2) T-HNear ist eine bicoreflektive Unterkategorie von HNear mit T als Bicoreflektor ([17] 4.8).
(3) T-HNear ist eine bireflektive Unterkategorie von T-PNear und PConv mit N als Bireflektor.

Beweis:
(1) gilt definitionsgemäß.
(2) und (3) folgen aus 1.3.7 und 2.1.27(1) •

2.1.31 Korollar:
(1) T-Near = T-SNear ∩ SubT-Near .
(2) T-Near ist eine bicoreflektive Unterkategorie von SubT-Near und Near mit T als Bicoreflektor [26],
(3) T-Near ist eine bicoreflektive Unterkategorie von T-HNear mit G als Bicoreflektor,
(4) T-Near ist eine bireflektive Unterkategorie von T-SNear und Conv mit N als Bireflektor.

Beweis: zu (1)

I-Near = Near ∩ I-PNear (2.1.3)
= (SNear ∩ T-PNear) ∩ Near (1.2.3(3))
= I-SNear ∩ Near (2.1.3)
= I-SNear ∩ (A-Grill ∩ Near) (2.1.25(1))
= T-SNear ∩ SubT-Near (2.1.29(1)) .

zu (2)

Die Aussage folgt aus der Inklusion $T[\text{Near}] \subset \text{Near}$, die man analog zu 2.1.27(1) beweist, unter Verwendung von 1.3.8 und 2.1.27(3).

zu (3)

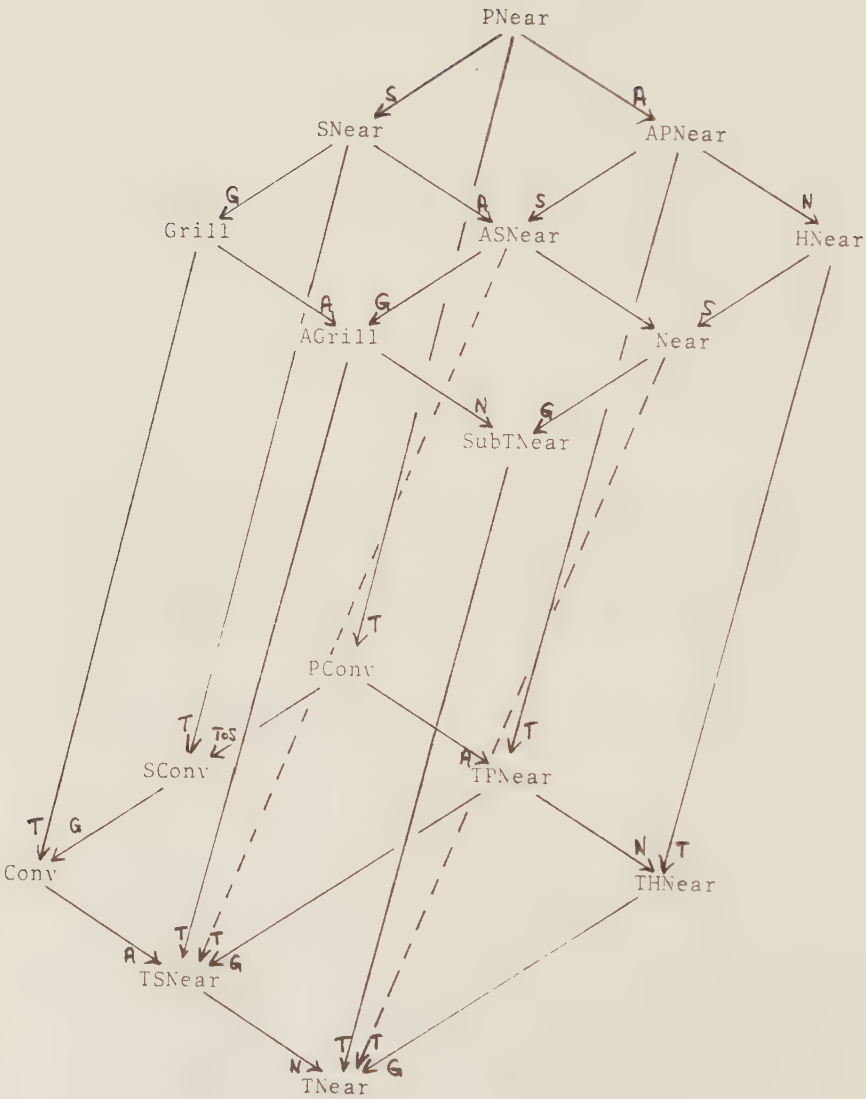
Dies ist eine Folgerung aus (2) und 1.3.8.

zu (4)

Das erhält man aus (2) und 1.3.7 •

Die Sätze dieses Abschnitts klären die Lage der topologischen Nearness-Räume in den Kategorien PNear, SNear, HNear und Near vollständig. Sie verdeutlichen, daß jeder topologische PN-Raum lokalisiert ist, also als Konvergenzraum gesehen werden kann.
Die betrachteten Kategorien von topologischen Raumklassen sind verschieden, wie die Beispiele 2,3 und 4 des Anhangs zeigen.
Das folgende Diagramm gibt eine Übersicht über die betrachteten Kategorien und verdeutlicht insbesondere die Rolle des Funktors T.

2.1.32 Diagramm:



Bicoreflektoren fallen nach links, Bireflektoren fallen nach rechts. Die Funktoren S und N wurden unter 1.2.3 , der Funktor T unter 2.1.10 (und 2.1.24) und der Funktor A unter 2.1.16 angegeben.

2.1.33 Bemerkung: Zur Vereinfachung der Darstellung ordnen wir jeder Kategorie der unteren Ebene im Diagramm 2.1.32 eine "Bezugskategorie" in der oberen Ebene zu:

Unterkategorie	Bezugskategorie
PConv	PNear
SConv	SNear
Conv	Grill
T-PNear	A-PNear
T-SNear	A-SNear
T-HNear	HNear
T-Near	Near

Die obigen Unterkategorien sind jeweils das Bild unter T ihrer Bezugskategorie.

§ 2.2 Initiale und finale Konstruktionen

In diesem Abschnitt wird die Bildung von Produkten, Coprodukten, Quotienten und Unterräumen in den Kategorien PConv, Conv, T-PNear, T-SNear, T-HNear und T-Near untersucht, um ihre Beschreibung im Abschnitt 2.1 zu vervollständigen.

Wie stets in topologischen Kategorien A (1.1.1) werden die genannten Konstruktionen in der Kategorie Set der Mengen ausführt und mit einer A-Struktur versehen [26].

2.2.1 Satz: Die Bildung von Produkten in A-PNear, HNear, PConv, T-PNear und T-HNear geschieht wie in PNear: Das Produkt der unterliegenden Mengen in Set wird mit der PNear-initialen Struktur bzgl. den Projektionen versehen.

Beweis: Eine Beschreibung der Bildung PNear-initialer Strukturen findet man in [26].
Da jede der obigen Kategorien eine bireflektive Unterkategorie von PNear oder PConv ist, bleibt nur zu zeigen, daß PConv-Produkte wie in PNear gebildet werden, d.h., daß das PN-Produkt (Y,η) einer Menge $(X_i,\xi_i)_{i\in I}$ von PConv-Objekten stets wieder ein PConv-Objekt ist. Sei $\mathcal{A}\in\eta$. Dann existiert für alle $i\in I$ ein $x_i\in X_i$ mit $p_i\mathcal{A}\cup\{\{x_i\}\}\in\xi_i$, wobei p_i die i-te Projektion bezeichnet. Definiere $y:=(x_i)_{i\in I}$. Dann ist $\mathcal{A}\cup\{\{y\}\}\in\eta$.

2.2.2 Satz: Ein PN-Produkt von nichtleeren PN-Räumen ist genau dann lokalisiert, wenn es jede Komponente ist.

Beweis: Sei (Y,η) das PN-Produkt einer Menge $(X_i,\xi_i)_{i\in I}$ von nichtleeren PN-Räumen und (Y,η) sei lokalisiert. Wähle für jedes $i\in I$ ein $x_i\in X_i$. Ist nun $\alpha\in\xi_i$, dann ist $\mathcal{B} := \{p_i^{-1}[A]\cap\bigcap_{j\in I, j\neq i} p_j^{-1}(x_j) \mid A\in\alpha\}\in\eta$. Also existiert ein $y=(y_i)_{i\in I}\in Y$ mit $\mathcal{B}\cup\{\{y\}\}\in\eta$. Nun folgt $p_i(\mathcal{B}\cup\{\{y\}\}) = \alpha\cup\{\{y_i\}\}\in\xi_i$. Die Umkehrung geht aus 2.2.1 hervor •

2.2.3 Korollar: Ein PN-Produkt von nichtleeren PN-Objekten ist genau dann topologisch (2.1.3), wenn es jede Komponente ist [17].

Beweis: Ist das PN-Produkt topologisch, so erfüllt es wegen 2.1.22 die Eigenschaften (A) und (L) 2.1.5, 2.1.8. Wegen 2.1.1c und 2.1.2 erfüllt dann jede Komponente die Eigenschaften (A) und (L), d.h. jede Komponente ist topologisch.
Die Umkehrung gilt wegen 2.2.1 •

2.2.4 Bemerkung: Beispiel 2.4 in [25] zeigt, daß die Produktbildung in T-Near und T-SNear nicht mit derjenigen ihrer Bezugskategorie (2.1.33) übereinstimmt. Man erhält die Produkte der Unterkategorie durch Anwendung des Funktors T auf das Produkt in der Bezugskategorie (1.3.1(1)). Jedoch werden Produkte in Conv wie in Grill gebildet ([4]3.3).

2.2.5 Satz: Ist das SN-Produkt von nichtleeren SN-Räumen topologisch, so ist es jede Komponente.

Beweis: Sei (Y,η) das SN-Produkt einer Menge $(X_i,\xi_i)_{i\in I}$ von nichtleeren SN-Räumen. Ist nun (Y,η)

topologisch, so erhält man für alle $i \in I$ und $\alpha \subset \mathcal{P}(X_i)$ die folgenden Äquivalenzen:

$$\alpha \in \widehat{\xi}_i \Leftrightarrow p_i^{-1}\alpha \in \widehat{\eta} \Leftrightarrow Y = \bigcup \mathrm{int}_\eta p_i^{-1}\alpha = p_i^{-1}\left[\bigcup \mathrm{int}_{\xi_i} \alpha\right]$$
$$\Leftrightarrow \bigcup \mathrm{int}_{\xi_i} \alpha = X_i \bullet$$

Der vorausgehende Satz gilt auch in Near , denn die Produktbildung in Near und SNear ist gleich.

2.2.6 Bemerkung: (1) Die Unterraumbildung in den Kategorien PNear, SNear und Grill ist identisch ([4],[26]). Es folgt, daß sie auch in den bireflektiven Unterkategorien HNear, Near und SubT-Near unverändert ist.

(2) Die Unterräume in den Kategorien PConv, SConv, Conv, T-PNear, T-SNear und T-Near erhält man durch Anwendung von T auf die entsprechenden PN-Unterräume (1.3.1).

2.2.7 Satz: Sei (X,ξ) ein lokalisierter PN-Raum (2.1.8). Dann sind für jede Teilmenge A von X mit $A = \mathrm{cl}_\xi A$ die Unterraumstrukturen in PConv und PNear identisch.

Beweis: Wegen 1.3.1(1) ist zu zeigen, daß der PN-Unterraum (A,ξ_a) lokalisiert ist. Hat man $\alpha \in \xi_A$, so folgt $\alpha \in \xi$, und es existiert ein $x \in X$ mit $\alpha \cup \{\{x\}\} \in \xi$. Wegen $A = \mathrm{cl}_\xi A$ folgt $\alpha \cup \{\{x\}\} \in \xi_A$ •

Da in allen Kategorien der oberen Ebene (2.1.32) die Unterraumbildung gleich ist (2.2.6), stimmen in allen Kategorien der unteren Ebene auf "abgeschlossenen" Teilmengen eines Objekts die dortige Unterraumstruktur mit der Unterraumstruktur der Bezugskategorie überein.

2.2.8 Satz: Sei (Y,η) ein lokalisierter PN-Raum, X eine Menge und $f:X\longrightarrow Y$ eine surjektive Abbildung. Dann ist (X,ξ) ebenfalls lokalisiert, wenn ξ die initiale PN-Struktur auf X bzgl. f und η ist.

Beweis: Ist $\mathcal{A}\in\xi$, folgt $f\mathcal{A}\in\eta$. Es existiert ein $y\in Y$ mit $f\mathcal{A}\cup\{\{y\}\}\in\eta$. Dann ist für $x\in f^{-1}[y]$ $\mathcal{A}\cup\{\{x\}\}\in\xi$ •

2.2.9 Satz: (1) Coprodukte in A-PNear werden gebildet wie in PNear.

(2) [17] Coprodukte in HNear werden gebildet wie in PNear.

Beweis: zu (1)
(Y,η) sei das PN-Coprodukt einer Menge $(X_i,\xi_i)_{i\in I}$ von A-PNear-Objekten. Dann ist zu zeigen, daß (Y,η) ein A-PNear-Objekt ist. Sei dazu $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(Y)$ mit $\bigwedge \mathrm{cl}_\eta\mathcal{A}\neq\emptyset$. Für $A\subset Y$ gilt stets

$$\mathrm{cl}_\eta A=\bigcup_{i\in I} j_i\left[\mathrm{cl}_{\xi_i} j_i^{-1}[A]\right],$$

wobei j_i die i-te Injektion bezeichnet. Da $\bigwedge \mathrm{cl}_\eta\mathcal{A}\neq\emptyset$ existiert ein $i\in I$ mit der Eigenschaft $\bigwedge \mathrm{cl}_{\xi_i} j_i^{-1}\mathcal{A}\neq\emptyset$. Es folgt $j_i^{-1}\mathcal{A}\in\xi_i$, also $\mathcal{A}\in\eta$ •

2.2.10 Korollar: In allen betrachteten Kategorien (Übersicht siehe 2.1.32) werden Coprodukte wie in PNear gebildet, da sie bicoreflektive Unterkategorien einer der in 2.2.9 genannten Kategorien sind.

2.2.11 Bemerkung: (1) Quotienten in PConv, SConv, Conv, Grill und SNear werden gebildet wie in PNear, da alle

genannten Kategorien bicoreflektive Unterkategorien von PNear sind.

(2) Quotienten in A-PNear, T-PNear, A-SNear, A-Grill und T-SNear erhält man durch Anwendung des Bireflektors A (2.1.15) auf die Quotienten in PNear, wie aus der zu 1.3.1(1) dualen Aussage folgt.

(3) Quotienten in HNear, Near, SubTNear, T-HNear und T-Near erhält man durch Anwendung des Bireflektors N (1.2.3(1)) auf die Quotienten in PNear, wie erneut aus der zu 1.3.1(1) dualen Aussage folgt.

§ 2.3 Unterraumhüller topologischer Raumklassen

H.L.Bentley führte die subtopologischen Räume ein, um Erweiterungen von topologischen Räumen zu untersuchen [2]. An anderer Stelle setzten H.L.Bentley und H.Herrlich diese Bemühungen fort [3]. Die Frage nach der Charakterisierung aller Unterräume von allgemeineren Klassen von topologischen Räumen, insbesondere der Klassen, die unter 2.1.3 und 2.1.8 eingeführt wurden, liegt nahe. M.S.Hastings berechnete in ihrer Dissertation [17] die Klasse SubT-HNear, und H.L.Bentley, H.Herrlich, W.A.Robertson [4] charakterisierten die Klasse SubConv.

Im Folgenden werden die Unterraumhüllen aller untersuchten Kategorien von topologischen PN-Räumen angegeben.
Wegen 2.2.6(1) ist es gerechtfertigt, statt PNear-Unterräumen, Near-Unterräumen etc. einfach Unterräume zu schreiben, wobei dann stets die Unterraumbildung in PNear gemeint ist. Entsprechend schreiben wir statt $Sub_{\underline{A}}$ (1.1.9) einfach Sub, denn für alle Bezugskategorien $\underline{A}$ (2.1.33) gilt $Sub_{\underline{A}} = Sub_{PNear}$.

2.3.1 Definition: Sei $\underline{K}$ eine Unterkategorie von PNear, $(X,\xi),(Y,\eta)$ $\underline{K}$-Objekte und $f:(X,\xi)\longrightarrow(Y,\eta)$ eine N-stetige Abbildung. Dann heißt f dicht, falls $cl_\eta f[X] = Y$ ist.

Ist f ein dichter, extremer Monomorphismus in $\underline{K}$, so wird (X,ξ) dichter $\underline{K}$-Unterraum von (Y,η) genannt. Ist $\underline{K}$ eine topologische Kategorie (1.1.1), verwenden wir wegen 1.1.2(3) für f auch den Begriff der dichten $\underline{K}$-Einbettung.

2.3.2 Satz: (1) Jeder PN-Raum ist ein dichter Unterraum eines PConv-Objektes.

(2) Jedes PNear-1-Objekt (1.2.5) ist ein dichter Unterraum eines PConv-1-Objekts.

Beweis: zu (1)

Sei $(X,\xi)\in$ PNear. Definiere

$$\alpha := \{\mathcal{A}\in\xi \mid \neg(\exists x\in X \text{ mit } \mathcal{A}\cup\{\{x\}\}\in\xi),\ \mathcal{A} \text{ Stack}\}\ .$$

Ist dann α leer, so ist nichts zu zeigen.
Andernfalls wird zu jedem $\mathcal{A}\in\alpha$ ein $x_{\mathcal{A}}\notin X$ so zu X adjungiert, daß für $\mathcal{A}\neq\mathcal{B}$ stets $x_{\mathcal{A}}\neq x_{\mathcal{B}}$ gilt. Sei

$X' := X\cup\{x_{\mathcal{A}} \mid \mathcal{A}\in\alpha\}$. Definiere

$\beta := \xi\cup\{\mathcal{B}\cup\{\{x_{\mathcal{B}}\}\} \mid \mathcal{B}\in\alpha\}\cup\{\mathcal{C}\subset\wp(X') \mid \cap\mathcal{C}\neq\emptyset\}$, und

$\xi' := \{\mathcal{A}\subset\wp(X') \mid \exists\,\mathcal{B}\in\xi \text{ mit } \mathcal{A}\ll\mathcal{B}\}$.

Dann ist (X',ξ') ein PN-Raum. Weiterhin ist (X',ξ') lokalisiert, denn sei $\mathcal{A}\in\xi'$. Dann existiert ein $\mathcal{B}\in\beta$ mit $\mathcal{A}\ll\mathcal{B}$. Es gelte $\mathcal{B}\in\xi$ und $\neg(\exists x\in X$ mit $\mathcal{B}\cup\{\{x\}\}\in\xi)$. Definiere $\mathcal{C} :=$ stack$\mathcal{B}$ (2.1.5) . Dann gilt $\mathcal{C}\in\xi$ und $\neg(\exists x\in X$ mit $\mathcal{C}\cup\{\{x\}\}\in\xi)$. Es folgt $\mathcal{C}\in\alpha$. Dann ist aber $\mathcal{C}\cup\{\{x_{\mathcal{C}}\}\}\in\beta$ und deshalb $\mathcal{A}\cup\{\{x_{\mathcal{C}}\}\}\in\xi'$.
Die Inklusion $i:(X,\xi)\longrightarrow(X',\xi')$ ist injektiv und N-stetig. Wir zeigen, daß ξ PNear-initial ist bzgl. i und ξ': Gilt $\mathcal{A}\in\xi'$ und $\mathcal{A}\subset\wp(X)$, so existiert ein $\mathcal{D}\in\beta$ mit $\mathcal{A}\ll\mathcal{D}$. Ist $\mathcal{D}\in\xi$, so ist $\mathcal{A}\in\xi$, und man ist fertig. Ist $\mathcal{D}=\mathcal{B}\cup\{\{x_{\mathcal{B}}\}\}$, wo $\mathcal{B}\in\alpha$ ist, so gilt sogar $\mathcal{A}\ll\mathcal{B}$. Es folgt $\mathcal{A}\in\xi$. Gilt schließlich $\cap\mathcal{D}\neq\emptyset$, so folgt $\cap\mathcal{D}\subset X$, da sonst $\mathcal{A}\notin\wp(X)$ folgen würde. Man erhält deshalb $\mathcal{D}\in\xi$ und somit $\mathcal{A}\in\xi$.

Die Abbildung i ist auch dicht, denn ist $x\in X'\setminus X$, d.h. gilt $x=x_{\mathcal{B}}$, wo $\mathcal{B}\in\alpha$, so folgt $\mathcal{B}\cup\{\{x_{\mathcal{B}}\}\}\in\xi'$, und somit $\{X,\{x_{\mathcal{B}}\}\}\in\xi'$, da $\mathcal{B}$ ein Stack ist.

zu (2)

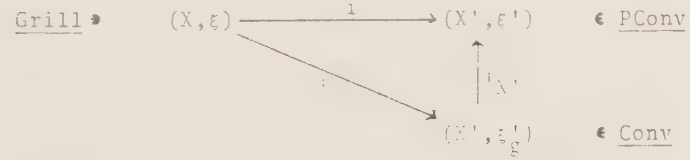
Ist (X,ξ) ein PNear-1-Raum, so ist in obiger Konstruktion auch (X',ξ') ein PNear-1-Raum •

2.3.3 Korollar: (1) Der Funktor S wurde unter 1.2.3(2) definiert. Es gilt: Jeder SN-Raum ist ein Unterraum eines Objektes aus $S[\underline{PConv}]$.

(2) Jeder grillbestimmte PN-Raum ist ein dichter Unterraum eines Konvergenzraumes [4].

Beweis: zu (1)
Gemäß 1.3.6 erhält man:
$\underline{SNear} = S[\underline{PNear}] = S[\mathrm{Sub}(\underline{PConv})] = \mathrm{Sub}(S[\underline{PConv}])$

zu (2)
Ein zu (1) analoger Schluß würde zwar ergeben, daß jeder grillbestimmte Raum ein Unterraum eines Konvergenzraumes ist, jedoch nicht die Dichtheit der Einbettung. Es ist deshalb nötig, direkt an die Konstruktion im Beweis zu 2.3.2 anzuschließen.
Sei $(X,\xi) \in \underline{Grill}$. Dann wurde unter 2.3.2 ein $\underline{PConv}$-Objekt (X',ξ') konstruiert, mit der Eigenschaft, daß die Inklusion $i:(X,\xi) \longrightarrow (X',\xi')$ eine dichte Einbettung war. Anwendung von G (2.1.7(2)) auf (X',ξ') ergibt den grillbestimmten Raum (X',ξ'_g).



Wegen 1.3.1(1) ist $i:(X,\xi) \longrightarrow (X',\xi'_g)$ eine Einbettung. Es wird nun gezeigt, daß diese Einbettung dicht ist: Sei $x \in X' \setminus X$, d.h. es existiert ein $\mathcal{U} \in \alpha$ mit $x = x_{\mathcal{U}}$. Da $\alpha \subset \xi$ und (X,ξ) ein grillbestimmter Raum ist, existiert ein ξ-Grill $\mathcal{G}$ mit $\mathcal{U} \subset \mathcal{G}$. Da $\mathcal{U} \in \alpha$ ist auch $\mathcal{G} \in \alpha$. Es folgt, daß $\mathcal{G} \cup \{\{x_{\mathcal{U}}\}\}$ ein ξ'-Grill ist. Da $\{X,\{x_{\mathcal{U}}\}\} \subset \mathcal{G} \cup \{\{x_{\mathcal{U}}\}\}$ folgt gemäß 2.1.7(2) $\{X,\{x_{\mathcal{U}}\}\} \in \xi'_g$, also $\mathrm{cl}_{\xi'_g} i[X] = X'$ •

2.3.4 Satz: (1) Jeder T-PNear-Raum ist ein dichter Unterraum eines T-PNear-Objektes.

(2) Jedes A-PNear-1-Objekt ist ein dichter Unterraum eines T-PNear-1-Objekts.

Beweis: zu (1)
Sei $(X,\xi)\in$A-PNear und $\alpha := \{\mathcal{A}\in\xi \mid \bigcap cl_\xi \mathcal{A} = \emptyset\ ,\ \mathcal{A}$ Stack$\}$.
Ist dann α leer, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls wird für jedes $\mathcal{A}\in\alpha$ ein $x_{\mathcal{A}}\notin X$ so zu X adjungiert, daß für $\mathcal{A}\neq\mathcal{B}$ stets $x_{\mathcal{A}}\neq x_{\mathcal{B}}$ gilt. Sei $X' := X\cup\{x_{\mathcal{A}} \mid \mathcal{A}\in\alpha\}$. Für $A\subset X'$ wird dann definiert:

$$hA := A \cup cl_\xi(A\cap X) \cup \{x_{\mathcal{A}} \mid \mathcal{A}\in\alpha \wedge (A\cap X)\in\mathcal{A}\}\ .$$

Dann erfüllt der Operator h die Axiome (H.0)-(H.3) der Definition 2.1.1. Durch

$$\mathcal{A}\in\xi' :\Leftrightarrow \bigcap h\mathcal{A} \neq \emptyset$$

wird dann gemäß 2.1.4(1) ein zu (X',h) isomorpher topologischer PN-Raum (X',ξ') definiert. Die Inklusion $i:(X,\xi)\longrightarrow(X',\xi')$ ist eine dichte Einbettung.

zu (2)
Ist (X,ξ) ein N1-Raum, so ist in der obigen Konstruktion auch (X',ξ') ein N1-Raum •

Die Beweismethode des vorausgehenden Satzes wird auch bei M.S.Hastings [17], H.Herrlich [26] und H.L.Bentley [-] benutzt.

2.3.5 Korollar: (1) Jeder A-SNear-Raum ist ein Unterraum eines Objekts aus S[T-PNear].

(2) Jeder A-Grill-Raum ist ein dichter Unterraum eines Objekts aus T-SNear.

Beweis: Unter Verwendung von 2.3.4 schließt man wie im Beweis zu 2.3.5 •

2.3.6 Satz [17]: (1) Jeder HN-Raum ist ein dichter Unterraum eines Objektes aus T-HNear.

(2) Jedes HNear-1-Objekt ist ein dichter Unterraum eines Objektes aus T-HNear-1.

2.3.7 Korollar: (1) [17] Jeder N-Raum ist Unterraum eines Objektes aus S[T-HNear].

(2) [2] Jeder subtopologische Raum ist ein dichter Unterraum eines Objektes aus T-Near.

(3) Jeder subtopologische N1-Raum ist ein dichter Unterraum eines topologischen N1-Raumes. Es gilt also SubT-Near ∩ Near-1 = Sub(T-Near-1) .

Beweis: zu (1)
Man argumentiert wie in 2.3.3(1).

zu (2)
Man argumentiert wie in 2.3.3(2) und erhält, daß jeder subtopologische Raum (X,ξ) Unterraum eines topologischen N-Raumes (Y,η) ist, mit einer N-Einbettung

$$e:(X,\xi) \longrightarrow (Y,\eta) .$$

Definiert man nun $Z := \mathrm{cl}_\eta e[X]$ und versieht Z mit der Relativstruktur ζ bezüglich η, so ist (Z,ζ) wegen 2.2.7 ein topologischer N-Raum. Die Abbildung

$$e':(X,\xi) \longrightarrow (Z,\zeta) ,$$

definiert durch $e'(x) := e(x)$ für alle $x \in X$ ist dann eine dichte N-Einbettung in einen topologischen N-Raum.

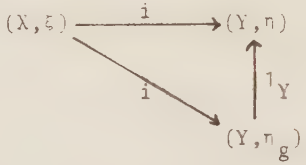
zu (3)

Die Behauptung ist klar, falls

$$\underline{\text{SubTNear-1}} \subset \text{Sub}(\underline{\text{TNear-1}}) \ ,$$

d.h. falls jeder subtopologische N1-Raum Unterraum eines topologischen N1-Raumes ist.

Sei dazu $(X,\xi) \in \underline{\text{SubTNear-1}}$. Dann ist (X,ξ) wegen 2.3.6(2) Unterraum eines topologischen N1-Hemi-Nearnessraums (Y,η) .



Anwendung von G auf (Y,η) liefert dann einen topologischen N1-Nearnessraum, und $i:(X,\xi) \longrightarrow (Y,\eta_g)$ ist wegen 1.3.1(2) eine Einbettung in $\underline{\text{SubTNear}}$, also auch eine N-Einbettung.

Wie im Beweis zu (2) erhält man nun eine dichte N-Einbettung in den topologischen N1-Raum (Z,ζ) , wobei $Z := \text{cl}_{\eta_g} i[X]$ und ζ die Relativstruktur auf Z bezüglich η_g ist.

§ 2.4 Bireflektive Hüllen topologischer Raumklassen

In diesem Abschnitt werden die bireflektiven Hüllen aller topologischen Raumklassen in ihrer Bezugskategorie (2.1.33) zunächst unter Verwendung der Infimumsbildung angegeben. Im Folgenden wird dann für einzelne Kategorien die Hülle direkt angegeben, für andere wird eine Approximation geliefert, d.h. es wird eine Eigenschaft betrachtet, die eine große Teilklasse der Hülle charakterisiert.

2.4.1 Lemma: (1) Grill ist initial-urbild-abgeschlossen in PNear und es gilt Ind $\subset$ Grill .

(2) Ist X eine Menge und $\mathcal{A} \subset \mathfrak{P}(X)$ eine Überdeckung von X, dann ist

$$\widehat{\xi(\mathcal{A})} := \{\mathcal{B} \subset \mathfrak{P}(X) \mid \mathcal{A} < \mathcal{B}\}$$

eine grillbestimmte PN-Struktur auf X .

Beweis: zu (1)
Sei $f:(X,\xi) \longrightarrow (Y,\eta)$ eine Abbildung von einem PN-Raum in einen grillbestimmten PN-Raum, mit der Eigenschaft, daß ξ PN-initial ist bzgl. f und η. Sei $\mathcal{A} \in \xi$. Dann ist $f\mathcal{A} \in \eta$ und es existiert ein Grill $\mathcal{G} \in \eta$ mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$. Definiere $\mathcal{F} \subset \mathfrak{P}(X)$ durch $\mathcal{F} := \{F \subset X \mid f[F] \in \mathcal{G}\}$. Dann ist $\mathcal{F}$ ein ξ-Grill mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$.
Die indiskreten Räume sind trivialerweise in Grill enthalten.

zu (2)
Die Axiome (N.1)-(N.3) der Definition 1.2.1 sind offenbar erfüllt. Die Eigenschaft (G) der Definition 2.1.6 ist noch zu zeigen.
Sei $\mathcal{T} \in \xi(\mathcal{A})$. Dann ist $\{X \setminus C, C \in \mathcal{T}\} \notin \widehat{\xi(\mathcal{A})}$, d.h. es existiert ein $A \in \mathcal{A}$, so daß für alle $C \in \mathcal{T}$ $A \cap C \neq \emptyset$.

Sei $\mathfrak{g} := \{G \subset X \mid A \cap G \neq \emptyset\}$. Dann ist $\mathfrak{g}$ ein $\xi(\alpha)$-
-Grill mit $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$.

2.4.2 Korollar: (1) AGrill und SubTNear sind initial-urbild-abgeschlossen in PNear mit Ind $\subset$ SubTNear $\subset$ AGrill .

(2) Für $(X,\xi) \in$ PNear sind äquivalent:

i) $(X,\xi) \in BH_{PNear}(Conv)$,

ii) $(X,\xi) \in EH_{PNear}(Conv)$,

iii) $\xi = \bigcap\{\kappa \mid (X,\kappa) \in Grill,\ \xi \subset \kappa\}$.

(3) Für $(X,\xi) \in$ PNear sind äquivalent:

i) $(X,\xi) \in BH_{PNear}(T\text{-}SNear)$,

ii) $(X,\xi) \in EH_{PNear}(T\text{-}SNear)$,

iii) $\xi = \bigcap\{\kappa \mid (X,\kappa) \in AGrill,\ \xi \subset \kappa\}$.

(4) Für $(X,\xi) \in$ SNear sind äquivalent:

i) $(X,\xi) \in BH_{SNear}(T\text{-}SNear)$,

ii) $(X,\xi) \in EH_{SNear}(T\text{-}SNear)$,

iii) $\xi = \inf_{SNear}\{\kappa \mid (X,\kappa) \in AGrill,\ \xi \subset \kappa\}$.

(5) Für $(X,\xi) \in$ HNear sind äquivalent:

i) $(X,\xi) \in BH_{HNear}(T\text{-}Near)$,

ii) $(X,\xi) \in EH_{HNear}(T\text{-}Near)$,

iii) $\xi = \bigcap\{\kappa \mid (X,\kappa) \in SubTNear,\ \xi \subset \kappa\}$.

(6) Für $(X,\xi) \in$ Near sind äquivalent:

i) $(X,\xi) \in BH_{Near}(T\text{-}Near)$,

ii) $(X,\xi) \in EH_{Near}(T\text{-}Near)$,

iii) $\xi = \inf_{Near}\{\kappa \mid (X,\kappa) \in SubTNear,\ \xi \subset \kappa\}$ [17].

Beweis: zu (1)

Das initiale Urbild eines AGrill-Objekts ist wegen 2.4.1(1) erneut grillbestimmt. Es erfüllt außerdem die Eigenschaft (A) (2.1.15), da die Klasse der PN-Räume mit (A) eine bireflektive Unterkategorie bildet (2.1.16).

Dieser Schluß gilt analog für SubTNear, statt (A) wird (N.5) betrachtet.

Da offenbar $\underline{\mathrm{Ind}} \subset \underline{\mathrm{T\text{-}Near}}$ gilt, folgt aus den Inklusionen, die in 2.1.32 verdeutlicht werden, die Behauptung.

zu (2)-(6)

Die Aussagen ergeben sich aus 1.1.8 •

2.4.3 Satz: Die bireflektive Hülle der Konvergenzräume in PNear ist PNear:

$$BH_{\underline{\mathrm{PNear}}}(\underline{\mathrm{Conv}}) = \underline{\mathrm{PNear}} .$$

Beweis : Wegen 2.3.3(2) gilt

$$BH_{\underline{\mathrm{PNear}}}(\underline{\mathrm{Conv}}) = BH_{\underline{\mathrm{PNear}}}(\underline{\mathrm{Grill}}) .$$

Sei $(X,\xi) \in \underline{\mathrm{PNear}}$. Gemäß 1.1.4 ist zu zeigen, daß 1_X-initial ist bzgl. der Klasse aller Λ-stetigen Abbildungen von (X,ξ) in Grill-Objekte.

Sei dazu $\mathcal{A} \in \widehat{\xi}$. Dann ist wegen 2.4.1(2) $\xi(\mathcal{A})$ eine Grill-Struktur auf X , so daß $1_X : (X,\xi) \longrightarrow (X,\xi(\mathcal{A}))$ ein Morphismus ist •

2.4.4 Korollar: (1) Für jede einzelne der im Folgenden betrachteten Kategorien sind bireflektive und epireflektive Hülle gleich.

(2) Die bireflektive Hülle von Grill , SNear, SConv und PConv in PNear ist PNear.

(3) Die bireflektive Hülle von Conv, Grill und SConv in SNear ist SNear .

(4) Die bireflektive Hülle von Conv in Grill ist Grill.

Beweis: 2.4.3 •

Die bireflektive Hülle von Grill in SNear wurde bereits von M.S.Hastings ([17],6.16) angegeben. Die Herleitung ist jedoch nicht korrekt.

Die bireflektiven Hüllen von T-SNear und T-Near in SNear und Near können nicht in der Weise berechnet werden, wie das im Beweis zu 2.4.3 geschah. Es gelingt aber, die bireflektive Hülle von T-SNear zu approximieren, d.h. es kann eine Klasse von Räumen angegeben werden, die sogar AGrill umfaßt, und deren bireflektive Hülle mit der von T-SNear übereinstimmt.

2.4.5 Definition: Ein PN-Raum (X,ξ) heißt konzentriert, falls gilt:

(K) Für alle $\mathcal{A}\in\xi$ mit $\bigcap \mathrm{cl}_\xi \mathcal{A} = \emptyset$ und für alle $\mathcal{F}\in\hat{\xi}$ existiert ein $B\in\mathcal{F}$, so daß für alle $A\in\mathcal{A}$ stets $|A\cap B|\geq \aleph_0$ erfüllt ist.

Die Klasse der konzentriert PN-Räume wird mit Kon bezeichnet, die der konzentrierten A-SNear-Räume mit ASKon, und die der konzentrierten N-Räume mit NKon.

2.4.6 Lemma: Jeder grillbestimmte PN-Raum ist konzentriert: Grill $\subset$ Kon.

Beweis: Sei $(X,\xi)\in$Grill, $\mathcal{A}\in\xi$ mit $\bigcap \mathrm{cl}_\xi \mathcal{A} = \emptyset$ und $\mathcal{F}\in\hat{\xi}$. Dann existieren ein ξ-Grill $\mathcal{G}$ mit $\mathcal{A}\subset\mathcal{G}$, und ein $B\in\mathcal{F}$ mit $B\in\sec\mathcal{G}$, d.h. $B\cap G\neq\emptyset$ für alle $G\in\mathcal{G}$ ([26],3.2.7). Wir nehmen an, daß ein $G\in\mathcal{G}$ existiert,

mit der Eigenschaft, daß $B \cap G$ von endlicher Mächtigkeit ist. Da $\mathfrak{q}$ ein Grill ist, folgt $B \cap G \in \mathfrak{q}$, was wegen ([17],7.11) $\bigcap cl_\xi \mathfrak{q} \neq \emptyset$ nach sich zieht. Es folgt $\bigcap cl_\xi \mathfrak{A} \neq \emptyset$, Widerspruch !•

2.4.7 Bemerkung: (1) Die reellen Zahlen mit der metrischen Uniformität $(\mathbb{R},\mu)$ sind nicht subtopologisch [2], was sich jetzt leicht mit 2.4.6 aus der Betrachtung von $\mathfrak{A} := \{A,B\}$, $A = \{2,3,4,\ldots\}$, $B=\{2+1/2,3+1/3,\ldots\}$ ergibt, denn man hat $\mathfrak{A} \in \mu$, aber für alle $\mathfrak{F}^\varepsilon = \{S(x,\varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}\}$ und für alle $S \in \mathfrak{F}^\varepsilon$ ist $|S \cap A| < \aleph_0$.

(2) Das vorangehende Resultat vereinfacht auch ein Beispiel von M.S.Hastings ([17],7.9.(2)). Bezeichne $(\mathbb{R},\rho)$ die reellen Zahlen mit der natürlichen topologischen Nearness und $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\eta)$ das N-Produkt von $(\mathbb{R},\rho)$ mit sich selbst. Dann ist

$$\hat{\mathfrak{B}} = \{pr_1^{-1}\mathfrak{A} \wedge pr_2^{-1}\mathfrak{B} \mid \mathfrak{A},\mathfrak{B} \text{ offene Überdeckung von } \mathbb{R}\}$$

eine Basis von $\hat{\eta}$. Sei $A=\{(1/n,n) \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$ und $B=\{(0,n) \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$. Dann ist $\{A,B\} \in \eta$, da für alle $\mathfrak{t} \in \hat{\mathfrak{B}}$ ein $C \in \mathfrak{t}$ existiert, so daß $A \cap C \neq \emptyset$ und $B \cap C \neq \emptyset$ ([26],3.2.7).
Nun gilt jedoch $cl_\eta A = A$ und $cl_\eta B = B$, so daß man $cl_\eta A \cap cl_\eta B = \emptyset$ erhält. Wählt man nun zu festem $\varepsilon > 0$ $\mathfrak{t} := pr_1^{-1}\mathfrak{F}^\varepsilon \wedge pr_2^{-1}\mathfrak{F}^\varepsilon$, so gilt $\mathfrak{t} \in \hat{\eta}$, aber es existiert kein $C \in \mathfrak{t}$ mit $|C \cap A| \geq \aleph_0$. Also ist $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\eta)$ nicht grillbestimmt, und damit nicht subtopologisch.

2.4.8 Satz: Die Klasse der konzentrierten A-SNear-Objekte liegt zwischen AGrill und der bireflektiven Hülle von T-SNear in PNear:

$$\underline{\text{AGrill}} \subset \underline{\text{ASKon}} \subset \text{BH}_{\underline{\text{PNear}}}(\underline{\text{T-SNear}}) .$$

Beweis:

AGrill $\subset$ ASKon gilt wegen 2.4.6.

Sei $(X,\xi)\in$ ASKon. Dann ist gemäß 2.4.2(3) zu zeigen, daß

$\hat{\xi} = \bigcup\{\kappa \mid (X,\kappa)\in$ AGrill, $\hat{\xi}\supset\hat{\kappa}\}$ gilt.

Sei $\mathcal{A}\in\hat{\xi}$. Gesucht ist nun eine AGrill-Struktur κ auf X mit $\mathcal{A}\in\hat{\kappa}$ und $\kappa\subset\xi$.

Definiere

$\hat{\mathcal{B}} := \{\{X\setminus\{x\},C\} \mid C\subset X,\ x\in \mathrm{int}_\xi C\}\cup\{\mathcal{A}\}$,

und

$\hat{\eta} := \{\tau\subset\mathcal{P}(X) \mid$ Es gibt $\mathcal{D}\in\hat{\mathcal{B}}$ mit $\mathcal{D}<\tau\}$.

1) Offenbar ist $\hat{\eta}\subset\hat{\xi}$ bzw. $\xi\subset\eta$.

2) (X,η) ist ein PN-Raum.

3) (X,η) erfüllt (A') (2.1.15), denn $\mathrm{int}_\eta = \mathrm{int}_\xi$, und da für alle $\tau\in\hat{\xi}$ stets $\bigcup \mathrm{int}_\xi\tau = X$ gilt, ist dies insbesondere für alle $\hat{\eta}$-Elemente erfüllt.

4) Auf (X,η) wird nun G (2.1.7(2)) angewandt, und man erhält (X,η_g), d.h. $\kappa := \eta_g$. Offenbar erfüllt κ die Eigenschaften $(X,\kappa)\in$ AGrill (wegen 2.1.20) und $\mathcal{A}\in\hat{\kappa}$, da $\mathcal{A}\in\hat{\eta}$ und $\hat{\eta}\subset\hat{\kappa}$ gilt.

Es bleibt $\hat{\kappa}\subset\hat{\xi}$ bzw. $\xi\subset\kappa$ zu zeigen.

Sei $\alpha\in\xi$. Wegen (1) ist dann $\alpha\in\eta$. Nach Definition von κ ist zu zeigen, daß ein η-Grill $\mathcal{G}$ existiert mit $\alpha\subset\mathcal{G}$.

Fall 1: $\bigcap \mathrm{cl}_\xi\alpha = \emptyset$.

Dann existiert ein $B\in\mathcal{A}$ mit $|B\cap A|\geq\aleph_0$ für alle $A\in\alpha$, denn (X,ξ) ist konzentriert (2.4.5).

Definiere $\mathcal{G} := \{G\subset X \mid |G\cap B|\geq\aleph_0\}$.

Dann ist $\alpha\subset\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}$ ist offensichtlich ein Grill.

Es bleibt zu zeigen, daß $\mathcal{G}\in\eta$ ist.

Nun gilt $\mathcal{G}\in\eta$ genau dann, wenn für alle $\mathcal{D}\in\hat{\eta}$ ein $D\in\mathcal{D}$ existiert, mit $G\cap D\neq\emptyset$ für alle $G\in\mathcal{G}$. Wir können uns offenbar auf die Überdeckungen aus $\hat{\mathcal{B}}$ be-

schränken: Ist $\mathfrak{D}$ von der Form $\{X\setminus\{x\},C\}$, so erhält man $G\cap(X\setminus\{x\})\neq\emptyset$ für alle $G\in\mathfrak{q}$, da jedes $G\in\mathfrak{q}$ unendlich viele Elemente besitzt. Ist $\mathfrak{D}=\mathfrak{b}$, so existiert gemäß der Definition von $\mathfrak{q}$ ein $B\in\mathfrak{b}$ mit der gewünschten Eigenschaft.

Fall 2 : $\bigcap cl_\xi \mathfrak{a} \neq \emptyset$.

Sei $x\in\bigcap cl_\xi\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{q} := \{G\subset X \mid x\in cl_\xi G\}$.

Dann gilt $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{q}$. $\mathfrak{q}$ ist ein Grill, da die unterliegende Semi-Topologie (H.4) erfüllt. Da (X,ξ) die Eigenschaft (A) besitzt, gilt $\mathfrak{q}\in\xi$. Aus (1) folgt dann $\mathfrak{q}\in\eta$ •

2.4.9 Korollar: (1) Die Klasse der konzentrierten A-SNear-Objekte liegt zwischen AGrill und der bireflektiven Hülle von T-SNear in SNear:

$$\underline{\text{AGrill}} \subset \underline{\text{ASKon}} \subset BH_{\underline{\text{SNear}}}(\underline{\text{T-SNear}}) .$$

(2) Die bireflektiven Hüllen von T-SNear und ASKon in PNear sind gleich.

(3) Die bireflektiven Hüllen von T-SNear und ASKon in SNear sind gleich.

Beweis: zu (1)
Aus 2.4.8 und 1.5.2 erhält man

$$\underline{\text{AGrill}} \subset \underline{\text{ASKon}} = S\left[\underline{\text{ASKon}}\right] \subset S\left[BH_{\underline{\text{PNear}}}(\underline{\text{T-SNear}})\right] =$$

$$= BH_{\underline{\text{SNear}}}(\underline{\text{T-SNear}}) .$$

zu (2)

$$\underline{\text{T-SNear}} \subset \underline{\text{ASKon}} \Rightarrow BH_{\underline{\text{PNear}}}(\underline{\text{T-SNear}}) \subset BH_{\underline{\text{PNear}}}(\underline{\text{ASKon}}) .$$

$$\underline{\text{ASKon}} \subset BH_{\underline{\text{PNear}}}(\underline{\text{T-SNear}})$$

$$\Rightarrow BH_{\underline{\text{PNear}}}(\underline{\text{ASKon}}) \subset BH_{\underline{\text{PNear}}}(\underline{\text{T-SNear}})$$

(3) erhält man analog zu (2) •

2.4.10 Lemma: (1) ASKon-1 ist abgeschlossen gegenüber Bildung von Unterobjekten.

(2) $\underline{\mathrm{Ind}} \cup \underline{\mathrm{Dis}} \subset \underline{\mathrm{ASKon}}$.

Beweis: zu (1)

Sei $(X,\xi) \in \underline{\mathrm{PNear}}$, $(Y,\eta) \in \underline{\mathrm{ASKon\text{-}1}}$ und $i:(X,\xi) \longrightarrow (Y,\eta)$ eine PN-Einbettung. Dann ist $(X,\xi) \in \underline{\mathrm{ASNear}}$ (2.1.19(3)). Wir betrachten X als Teilmenge von Y .

Sei $\mathfrak{A} \in \xi$ mit $\bigwedge \mathrm{cl}_\xi \mathfrak{A} = \phi$, und $\mathfrak{F} \in \widehat{\xi}$. Dann existiert $\mathfrak{T} \in \widehat{\eta}$ mit $\mathfrak{F} = \mathfrak{T} \wedge \{X\}$.

Fall 1 : $\bigwedge \mathrm{cl}_\eta \mathfrak{A} = \phi$.

Dann existiert $C \in \mathfrak{T}$ mit $|C \cap A| \geq \aleph_0$ für alle $A \in \mathfrak{A}$.

Offenbar hat dann $B := C \cap X$ die in 2.4.5 verlangten Eigenschaften.

Fall 2 : $\bigwedge \mathrm{cl}_\eta \mathfrak{A} \neq \phi$.

Dann existiert $y \in Y \setminus X$ mit $y \in \bigwedge \mathrm{cl}_\eta \mathfrak{A}$. Wegen der Gültigkeit von (A) (2.1.15) existiert ein $C \in \mathfrak{T}$ mit $y \in \mathrm{int}_\eta C$. Der von (Y,η) induzierte semitopologische Raum (Y,cl_η) (2.1.4(1)) hat die Eigenschaften:

a) Für alle $y \in Y$ ist $\mathrm{cl}_\eta\{y\} =$ . .

b) Ist $A \subset Y$, $y \in Y$ mit $y \in \mathrm{cl}_\eta A$ und $y \notin A$, dann folgt für alle $C \subset Y$ mit $y \in \mathrm{int}_\eta C$, daß $|A \cap C| \geq \aleph_0$ ist.

Wähle nun $B := C \cap X$, so gilt $|A \cap B| \geq \aleph_0$ für alle $A \in \mathfrak{A}$.

zu (2)

Das ist klar •

2.4.11 Satz:

(1) $\underline{\mathrm{SubTNear}} \subset \underline{\mathrm{NKon}} \subset \underline{\mathrm{Near}}$,

(2) $\underline{\mathrm{NKon\text{-}1}} \subset \mathrm{EH}_{\underline{\mathrm{HNear}}}(\underline{\mathrm{SubTNear\text{-}1}})$,

(3) $\underline{\mathrm{NKon\text{-}1}} \subset \mathrm{EH}_{\underline{\mathrm{Near}}}(\underline{\mathrm{SubTNear\text{-}1}})$,

(4) Die epireflektiven Hüllen von T-Near-1, SubTNear-1 und NKon-1 in HNear sind gleich.

(5) Die epireflektiven Hüllen von T-Near-1, SubTNear-1 und NKon-1 in Near sind gleich.

Beweis: zu (1)
Siehe 2.1.26, 2.4.5 und 2.4.6.

zu (2)
Wegen 1.2.5(2) genügt es, $\underline{\text{NKon-1}} \subset BH_{\underline{\text{HNear}}}(\underline{\text{SubTNear-1}})$ zu zeigen.
Sei dazu $(X,\xi)\in\underline{\text{NKon-1}}$. Dann ist zu zeigen, daß für alle $\mathcal{U}\in\widehat{\xi}$ ein subtopologischer N1-Raum (Y,η), eine N-stetige Abbildung $f:(X,\xi)\longrightarrow(Y,\eta)$ und ein $\tau\in\widehat{\eta}$ existieren, derart, daß $f^{-1}\tau<\mathcal{U}$.
Dies ist sicher dann erfüllt, wenn zu jedem $\mathcal{U}\in\widehat{\xi}$ ein subtopologischer N1-Raum (X,κ) angegeben werden kann, so daß $\mathcal{U}\in\widehat{\kappa}$ und $1_X:(X,\xi)\longrightarrow(X,\kappa)$ erfüllt sind.

Das wird im Folgenden getan.
Sei $\mathcal{U}\in\widehat{\xi}$. Definiere

$$\widehat{\beta}:=\{\{X\setminus\{x\},\operatorname{int}_\xi C\}\ C\subset X, x\in\operatorname{int}_\xi C\}\cup\{\operatorname{int}_\xi\mathcal{U}\},$$

und

$$\widehat{\eta}:=\{\tau\subset\mathcal{P}(X)\mid\text{Es gibt }\mathcal{D}\in\widehat{\beta}\text{ mit }\mathcal{D}<\tau\}.$$

Dann gilt
(1) $\widehat{\eta}\subset\widehat{\xi}$, bzw. $\xi\subset\eta$, und
(2) für alle $A\subset X$ gilt $\operatorname{int}_\xi A=\operatorname{int}_\eta A$.

Dies bedingt, daß $(X,\eta)\in\underline{\text{HNear-1}}$ ist.
Sei nun (X,κ) das Bild von (X,η) unter G (2.1.7(2)). Dann ist (X,κ) ein subtopologischer N1-Raum mit $\mathcal{U}\in\widehat{\kappa}$. Es bleibt zu zeigen, daß $\xi\subset\kappa$.
Dies geschieht in Analogie zum Beweis des Satzes 2.4.8.

zu (3)
Aus 1.3.5 erhält man

$$\underline{\text{NKon-1}} = S\left[\underline{\text{NKon-1}}\right]\subset S\left[EH_{\underline{\text{HNear}}}(\underline{\text{SubTNear-1}})\right] =$$

$$= EH_{\underline{\text{Near}}}(\underline{\text{SubTNear-1}})$$

zu (4)

Jeder subtopologische N1-Raum ist Unterraum eines topologischen N1-Raumes (2.3.7(3)), so daß die epireflektiven Hüllen von T-Near-1 und SubT-Near-1 übereinstimmen.

Wegen (1) und (2) sind die epireflektiven Hüllen von SubT-Near-1 und NKon-1 identisch.

zu (5)

Erneute Anwendung von 1.3.5 •

2.4.12 Bemerkung: (1) Die bireflektiven Hüllen von T-HNear und T-PNear sind bereits durch 2.3.4 und 2.3.6 beschrieben.

(2) Es bleibt weiterhin ein zentrales Problem, interne Charakterisierungen der bireflektiven Hüllen der topologischen SN-Räume und N-Räume zu geben. Möglicherweise stellen die hier beschriebenen Approximationen einen Ausgangspunkt für eine Lösung dieser Aufgabe dar.

(3) Wie man leicht einsieht, ist das N-Produkt der reellen Zahlen (versehen mit der natürlichen Topologie) mit sich selbst nicht konzentriert. Somit sind die konzentrierten N1-Räume echt in der epireflektiven Hülle von T-Near-1 in Near enthalten. Es ist ein offenes Problem, ob ein konzentrierter N1-Raum existiert, der nicht subtopologisch ist.

§ 2.5 Bicoreflektive Hüllen topologischer Raumklassen

Die Bildung von Coprodukten ist in den Kategorien PNear, HNear, SNear und Near gleich (2.2.10). Die Kategorien T-Near und T-HNear sind als bicoreflektive Unterkategorien ihrer Bezugskategorien (2.1.33) abgeschlossen gegenüber der Bildung von Coprodukten.
Somit ist die bicoreflektive Hülle in PNear aller oben genannten Kategorien $\underline{K}$ identisch mit der Klasse aller ihrer PN-Quotienten, der Quotientenhülle $\mathrm{Quot}_{\underline{PNear}}(\underline{K})$.
Im Folgenden werden Quotienten nur in PNear betrachtet.
Bekannt sind folgende Resultate:

2.5.1 Satz

(1) (M.Katetov [37]) $\mathrm{Quot}(\underline{T\text{-}Near}) = \underline{Conv}$.

(2) (H.L.Bentley,H.Herrlich,W.A.Robertson [4]) $\mathrm{Quot}(\underline{SubTNear}) = \underline{Grill}$.

(3) (M.Katetov [36]) $\mathrm{Quot}(\underline{Near}) = \underline{SNear}$.

Hier sollen nun die verbleibenden Hüllen betrachtet werden.

2.5.2 Satz: $\mathrm{Quot}(\underline{HNear}) = \underline{PNear}$.

Beweis: Sei $(X,\xi)\in\underline{PNear}$. Die Menge der Stacks (2.1.5) in ξ sei mit $\{\tau_i \mid i\in I\}$ bezeichnet.

Definiere zu $i\in I$:

$$\xi_i := \{\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(X) \mid \mathcal{A}\subset\tau_i \text{ oder } \cap\mathcal{A}\neq\emptyset\} .$$

1) (X,ξ_i) ist ein PN-Raum:
(N.1) Ist erfüllt, da τ_i ein Stack ist.
(N.2) Ist definitionsgemäß erfüllt.
(N.3) Es gilt $\xi_i\neq\emptyset$, da $\tau_i\in\xi_i$. Außerdem hat man

$\xi_i \neq \mathcal{P}^2(X)$, da $\{\phi\} \notin \xi_i$.

2) (X,ξ_i) ist ein HN-Raum:

(N.5) ist zu zeigen.

Für $A \subset X$ gilt offenbar $cl_{\xi_i} A = A \cup \{x \in X \mid \{\{x\},A\} \subset \gamma_i\}$.

Hieraus ergibt sich:

(*) $A \notin \gamma_i \Rightarrow cl_{\xi_i} A = A$ und $cl_{\xi_i} A \notin \gamma_i$.

Ist nämlich $A \notin \gamma_i$, dann gilt für alle $x \in X$ stets $\{\{x\},A\} \notin \gamma_i$. Daraus folgt dann $cl_{\xi_i} A = A$ und deswegen $cl_{\xi_i} A \notin \gamma_i$.

Sei nun $cl_{\xi_i} \mathfrak{A} \in \xi_i$.

Fall 1 : $cl_{\xi_i} \mathfrak{A} \subset \gamma_i$.

Dann folgt wegen (*) $\mathfrak{A} \subset \gamma_i$, also $\mathfrak{A} \in \xi_i$.

Fall 2 : $cl_{\xi_i} \mathfrak{A} \not\subset \gamma_i$.

Dann folgt $\bigcap cl_{\xi_i} \mathfrak{A} \neq \phi$. Gilt sogar $\bigcap \mathfrak{A} \neq \phi$, ist man fertig. Andernfalls existiert ein $x \in X$ und ein $A \in \mathfrak{A}$, so daß für alle $B \in \mathfrak{A}$ stets $\{\{x\},B\} \in \xi_i$ und $x \notin A$ gilt. Es folgt $\{x\} \in \gamma_i$ und $A \in \gamma_i$.

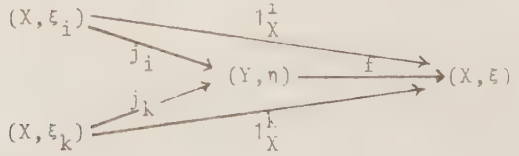
Für jedes $B \in \mathfrak{A}$ mit $x \in B$ folgt nun $B \in \gamma_i$, da γ_i ein Stack ist. Gilt nun $x \notin B$, so schließt man $B \in \gamma_i$. Also ist $\mathfrak{A} \subset \gamma_i$ und deshalb $\mathfrak{A} \in \xi_i$.

3) Konstruktion von (Y,η) :

Für jedes $i \in I$ ist nach Definition von ξ_i

$$1_X^i : (X,\xi_i) \longrightarrow (X,\xi)$$

N-stetig. Sei nun (Y,η) das Coprodukt der Familie $(X,\xi_i)_{i \in I}$.



Dann existiert genau eine N-stetige Abbildung

$$f:(Y,\eta)\longrightarrow(\lambda,\xi)$$

die obiges Diagramm kommutativ macht.
(Y,η) ist ein HN-Raum, da jedes (X,ξ_i) ein HN-Raum ist.

4) f ist eine Quotientenabbildung:
f ist offenbar surjektiv und N-stetig. Es bleibt zu zeigen, daß ξ bzgl. f und η final ist, d.h., daß aus $\mathcal{A}\in\xi$ stets $f^{-1}\mathcal{A}\in\eta$ folgt.
Sei $\mathcal{A}\in\xi$. Dann existiert ein $i\in I$ mit $\mathcal{F}_i = \operatorname{stack}\mathcal{A}$.
Es gilt $f^{-1}\mathcal{A}\in\eta$ genau dann, wenn ein $k\in I$ existiert mit $j_k^{-1}f^{-1}\mathcal{A}\in\xi_k$, wobei j_k die k-te Injektion von (X,ξ_k) in das Coprodukt (Y,η) bezeichnet.
Nun gilt aber $j_i^{-1}f^{-1}\mathcal{A} = 1_X^{i^{-1}}\mathcal{A} = \mathcal{A}\subset\mathcal{F}_i\in\xi_i$, so daß man $f^{-1}\mathcal{A}\in\eta$ erhält •

2.5.3 Korollar:

(1) $\quad \operatorname{Quot}(\underline{A\text{-PNear}}) = \underline{PNear}$,

(2) $\quad \operatorname{Quot}_{\underline{A\text{-PNear}}}(\underline{HNear}) = \underline{A\text{-PNear}}$.

2.5.4 Satz: $\quad \operatorname{Quot}(\underline{T\text{-HNear}}) = \underline{PConv}$.

Beweis: Man geht ähnlich vor wie im Beweis zu Satz 2.5.2.
Sei $(X,\xi)\in\underline{PConv}$, $\{\mathcal{F}_i \mid i\in I\}$ die Menge aller ξ-Stacks mit der Eigenschaft:
Für alle $i\in I$ existiert ein $x_i\in X$ mit $\{x_i\}\in\mathcal{F}_i$.
Dann wird für alle $i\in I$ durch

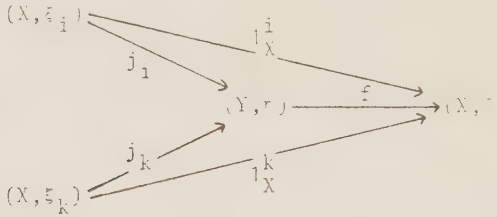
$$\xi_i := \{\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(X) \mid \mathcal{A}\subset\mathcal{F}_i \text{ oder } \cap\mathcal{A}\neq\emptyset\}$$

ein HN-Raum (X,ξ_i) definiert.
(X,ξ_i) ist sogar topologisch, denn sei $\mathcal{A}\in\xi_i$.
Gilt $\cap\mathcal{A}\neq\emptyset$, so folgt trivialerweise $\cap\operatorname{cl}_{\xi_i}\mathcal{A}\neq\emptyset$.

Ist $\alpha \subset \gamma_i$, so ist auch $\alpha \cup \{\{x_i\}\} \subset \gamma_i$ also $x_i \in \bigcap \mathrm{cl}_{\xi_i} \alpha$.

Sei (Y,η) das Coprodukt der Familie $(X,\xi_i)_{i\in I}$.

Dann ist (Y,η) ein topologischer HN-Raum, und das folgende Diagramm kommutiert:



Alle Abbildungen sind N-stetig. Zu zeigen bleibt, daß ξ final ist bzgl. f und $\cdot$.

Sei $\alpha \in \xi$. Dann existiert ein $x \in X$ mit $\alpha \cup \{\{x\}\} \in \xi$.

Sei $x_i := x$ und $\gamma_i := \mathrm{stack}(\alpha \cup \{\{x_i\}\})$.

Dann ist $\alpha = (1_X^i)^{-1}\alpha = j_i^{-1}f^{-1}\alpha \in \xi_i$, also $f^{-1}\alpha \in \eta$.

2.5.5 Korollar:

(1) $\mathrm{Quot}(\underline{\text{T-PNear}}) = \underline{\text{PConv}}$,

(2) $\mathrm{Quot}_{\underline{\text{A-PNear}}}(\underline{\text{T-HNear}}) = \underline{\text{T-PNear}}$.

2.5.6 Bemerkung zum Abschluß des Kapitels:

(1) In Anlehnung an die Fragestellung in [4], ausgehend von "kleinen" Unterkategorien durch kategorielle Hüllenbildung "große" zu konstruieren, wurde gezeigt, daß die bireflektive Hülle der bicoreflektiven Hülle in PNear von T-Near ganz PNear ergibt.

(2) Kernproblem in diesem Zusammenhang bleibt die Angabe der bi(epi)-reflektiven Hüllen von

a) T-SNear in PNear ,
b) T-SNear in SNear ,
c) T-Near in HNear ,
d) T-Near in Near

durch eine interne Charakterisierung.

Kapitel 3

Einfache Kategorien

Das Interesse ist auf die Angabe der epi- und bireflektiven Hülle einpunktiger Raumklassen in Near gerichtet.
Weiterhin wird von einigen Unterkategorien von Near gezeigt, daß sie nicht einfach erzeugt sind.
Die Ergebnisse 3.3.4, 3.3.10(3), und 3.3.17 sind Lösungen von Problemen aus [23] .

§ 3.1 Near ist nicht einfach erzeugt

In Anlehnung an [18] und [42] wird definiert:

3.1.1 Definition: Sei $\underline{E}$ eine epireflektive Unterkategorie einer topologischen Kategorie $\underline{A}$ (1.1.1).
Eine epireflektive Unterkategorie $\underline{D}$ von $\underline{E}$ heißt dann einfach - oder einfach erzeugt - in $\underline{E}$, wenn ein $\underline{E}$-Objekt (X,ξ) existiert, mit der Eigenschaft, daß

$$EH_{\underline{E}}(\{(X,\xi)\}) = \underline{D} .$$

3.1.2 Satz [42]: Für eine bireflektive Unterkategorie $\underline{B}$ einer topologischen Kategorie $\underline{A}$ sind äquivalent:

(1) $\underline{B}$ ist einfach in $\underline{A}$.

(2) $\underline{B} \cap \underline{T_o^A}$ ist einfach in $\underline{A}$.

Dabei bezeichnet $\underline{T_o^A}$ die Klasse der T_o^A-Räume (1.1.5).

3.1.3 Korollar: Eine bireflektive Unterkategorie $\underline{B}$ von Near ist genau dann einfach in Near, wenn es $\underline{B\text{-}1}$ (1.2.5) ist.

Beweis: Für $\underline{A} = \underline{Near}$ ist die Klasse der T_o^A-Räume gerade $\underline{Near}$-$\underline{1}$ (1.2.4) •

3.1.4 Satz: Sei $\underline{E}$ eine epireflektive Unterkategorie von $\underline{Near}$ mit

$$T[\underline{E}] \supset \{\text{reguläre topologische Räume}\} .$$

Dann ist $\underline{E}$ nicht einfach in $\underline{Near}$.

Beweis: Wir nehmen an, daß $\underline{E}$ in $\underline{Near}$ einfach ist, daß also ein N-Raum (X,ξ) existiert mit

$$EH_{\underline{Near}}(\{(X,\xi)\}) = \underline{E} .$$

Wie im Anschluß an den Beweis des Satzes 1.3.5 ausgeführt wurde, sind die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt, wenn die umfassende Kategorie -dort $\underline{E}$ genannt- eine topologische Kategorie ist. Dieser Sachverhalt liegt in der folgenden Anwendung vor:

$$EH_{\underline{T\text{-}Near}}(\{(X,\xi_t)\}) = T[EH_{\underline{Near}}(\{(X,\xi)\})] = T[\underline{E}] .$$

Es folgt, daß $T[\underline{E}]$ eine epireflektive Unterkategorie von $\underline{Top}$ ist, die nach Voraussetzung die regulären topologischen Räume umfaßt. Ein Resultat von Th.Marny ([42],4.4.5), wonach keine in $\underline{Top}$ epireflektive Unterkategorie existiert, die einfach ist und die die regulären topologischen Räume umfaßt, führt nun zum Widerspruch •

3.1.5 Bemerkung: (1) Die Klasse $\underline{Dis}$ der diskreten N-Räume ist nicht einfach. Nimmt man nämlich die Existenz eines N-Raumes (D,δ) an, der $\underline{Dis}$ erzeugt, so liegt $\underline{Dis}$ auch in der bireflektive Hülle von (D,δ) in $\underline{Near}$. Ist nun $(E,\varepsilon) \in \underline{Dis}$, so folgt aus 1.1.4, daß zu jeder Überdeckung $\mathcal{A} \in \widehat{\varepsilon}$ endlich viele N-stetige Abbildungen $f_1,\dots,f_n:(E,\varepsilon) \longrightarrow (D,\delta)$ und Überdeckungen $\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_n$ von D existieren, so daß

$$f_1^{-1}\mathcal{B}_1 \wedge \dots \wedge f_n^{-1}\mathcal{B}_n \prec \mathcal{A} .$$

Da (E,ε) diskret ist, gilt insbesondere

$$\mathcal{A} := \{\{x\} | x \in E\} \in \mathfrak{C} .$$

Wie oben ausgeführt wurde, existieren nun Abbildungen f_i und Überdeckungen $\mathcal{L}_i$ von D $(i=1,\ldots,n)$ mit der obigen Eigenschaft, und jede dieser Überdeckungen hat eine Mächtigkeit, die kleiner oder gleich der Mächtigkeit von $\mathfrak{P}(D)$ ist.
Auf Grund der speziellen Wahl von $\mathcal{A}$ gilt nun

$$|\mathcal{A}| \leq |f_1^{-1}\mathcal{L}_1 \wedge \ldots \wedge f_n^{-1}\mathcal{L}_n|,$$

so daß

$$|E| = |\mathcal{A}| \leq |f_1^{-1}\mathcal{L}_1 \wedge \ldots \wedge f_n^{-1}\mathcal{L}_n| \leq |\mathfrak{P}(D)|$$

folgt.
Diese Aussage kann jedoch unmöglich für alle diskreten N-Räume (E,ε) richtig sein, da es solche Räume mit einer beliebigen Mächtigkeit der unterliegenden Menge gibt.

(2) Jede Unterkategorie $\underline{E}$ von Near, die $\underline{\mathrm{Dis}} \subset \underline{E}$ erfüllt, ist wegen der Ausführungen in (1) nicht einfach erzeugt.

3.1.6 Korollar: Die folgenden Unterkategorien von Near sind in Near nicht einfach erzeugt:

(1.a) die Kategorie Near,
(1.b) Near-1 ,
(2.a) die Kategorie R-Near der regulären N-Räume ([26], 11.9),
(2.b) R-Near-1 ,
(3.a) die Kategorie U-Near der uniformen N-Räume ([26], 4.15),
(3.b) U-Near-1 ,
(4.a) die Kategorie OdimNear der nulldimensionalen N-Räume (3.3.2),
(4.b) OdimNear-1 ,
(5.a) die Kategorie C-Near der kontigualen N-Räume ([26], 4.9),

(5.b) C-Near-1 ,

(6.a) die Kategorie TB-Near der totalbeschränkten N-Räume ([26],17.2),

(6.b) TB-Near-1 .

Beweis: Die (b)-Aussagen ergeben sich mit 3.1.2 aus den (a)-Aussagen.

zu (1)-(4)

Wegen Dis ⊂ OdimNear ⊂ UNear ⊂ R-Near ⊂ Near folgen aus 3.1.5(2) die Behauptungen.

zu (5) und (6)

Wegen C-Near ⊂ TB-Near und {reguläre topologische Räume} ⊂ T-Near = T[C-Near] ([50] bzw. [26],A.12(3)) folgen aus 3.1.4 die Behauptungen •

Ind bezeichnet die Klasse der indiskreten N-Räume, (I_2,ω) den zweipunktigen indiskreten N-Raum und P die Unterkategorie der höchstens einpunktigen N-Räume.

3.1.7 Satz:

(1) Ind ist die kleinste bireflektive Unterkategorie von Near.

(2) Ind wird von (I_2,ω) einfach erzeugt.

(3) P ist die kleinste epireflektive Unterkategorie von Near.

(4) P wird von jedem einpunktigen N-Raum erzeugt.

Beweis: zu (1)

Unterobjekte und Produkte von indiskreten N-Räumen bleiben stets indiskret. Jede bireflektive Unterkategorie von Near umfaßt Ind ([26],A.9).

zu (2)

Jeder indiskrete Raum ist initial bzgl. der Klasse

aller N-stetigen Abbildungen nach (I_2,ω) .

zu (3) und (4)

Die Behauptungen folgen aus 3.1.2 bzw. 3.1.3, da

$\underline{P} = \underline{Ind} \cap \underline{Near\text{-}1}$ •

§ 3.2 Die bireflektive Hülle von $[0,1]$

Das Einheitsintervall $[0,1]$ wird mit der natürlichen Nearness-Struktur μ versehen und mit (I,μ) bezeichnet.
In [23] findet man die Angabe der epireflektiven Hülle von (I,μ), jedoch ohne einen näheren Hinweis auf die Herkunft des Ergebnisses.

3.2.1 Lemma: Sei $(X,\xi)\in$ U-Near. Dann existiert zu jeder zweipunktigen Überdeckung $\{A,B\}\in\widehat{\xi}$ eine N-stetige Funktion $f:(X,\xi)\longrightarrow(I,\mu)$, so daß $f[X\backslash A]=0$ und $f[X\backslash B]=1$ erfüllt ist.

Beweis: Aus $A\cup B=X$ erhält man $X\backslash(A\cup B)=\emptyset$ bzw. $(X\backslash A)\cap(X\backslash B)=\emptyset$.
Man definiert nun $Y:=(X\backslash A)\cup(X\backslash B)$ und versieht Y mit der Relativ-N-Struktur η bzgl. der Einbettung in (X,ξ). Da $\{A,B\}\in\widehat{\xi}$ ist, folgt $\{Y\cap A, Y\cap B\}=\{X\backslash B, X\backslash A\}\in\widehat{\eta}$. Dann ist $g:(Y,\eta)\longrightarrow(I,\mu)$, definiert durch $g[X\backslash A]=0$ und $g[X\backslash B]=1$ N-stetig, da für jede Überdeckung $\mathcal{G}\in\mu$ stets $f^{-1}\mathcal{G}=\{X\backslash A, X\backslash B\}\in\widehat{\eta}$ erfüllt ist.
Wegen ([32], III.9) besitzt nun g eine N-stetige Fortsetzung $f:(X,\xi)\longrightarrow(I,\mu)$, die dann $f[X\backslash A]=0$ und $f[X\backslash B]=1$ erfüllt •

3.2.2 Satz: (1) Die bireflektive Hülle des Einheitsintervalls (I,μ) in Near ist die Kategorie Pr-Near der proximalen N-Räume ([26], 4.22).

(2) Die epireflektive Hülle des Einheitsintervalls (I,μ) in Near ist die Kategorie Pr-Near-1 der separierten, proximalen N-Räume.

Beweis: zu (1)

(I,μ) ist als T_2-kompakter topologischer Raum ein proximaler N-Raum ([25],4.2). Da die Kategorie der proximalen N-Räume eine bireflektive Unterkategorie von Near ist, folgt

$$BH_{Near}(\{(I,\mu)\}) \subset \text{Pr-Near} .$$

Sei (X,ξ) ein proximaler N-Raum. Es ist dann zu zeigen, daß ξ die initiale N-Struktur auf X bzgl. der Menge aller N-stetigen Abbildungen von (X,ξ) nach (I,μ) ist.

Sei dazu $\mathfrak{A} \in \widehat{\xi}$. Dann existiert eine endliche Teilfamilie $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}' \in \widehat{\xi}$. $\mathfrak{A}'$ wird von einem endlichen Schnitt $\mathfrak{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{B}_n$ von zweielementigen Überdeckungen $\mathfrak{B}_i \in \widehat{\xi}$ verfeinert ([32],II.36) . Zu jedem $\mathfrak{B}_i$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, existiert eine N-stetige Funktion $f_i : (X,\xi) \longrightarrow (I,\mu)$, so daß für alle $i \in \{1,\ldots,n\}$ $f_i^{-1}\{[0,1),(0,1]\} < \mathfrak{B}_i$ erfüllt ist (3.2.1) .

Für $\mathfrak{T} := \{[0,1),(0,1]\}$ gilt demnach

$$f_1^{-1}\mathfrak{T} \wedge \ldots \wedge f_n^{-1}\mathfrak{T} < \mathfrak{A} ,$$

was zu zeigen war.

zu (2)

Das folgt aus 1.2.5(2) •

3.2.3 Korollar:

(1) Die bireflektive Hülle von (I,μ) in T-Near sind die T_{3a}-Räume.

(2) Die epireflektive Hülle von (I,μ) in T-Near sind die vollständig regulären Räume

Beweis: Da bekanntlich $T[\text{Pr-Near}] = \{T_{3a}\text{-Räume}\}$ gilt, folgen aus 1.3.2 und 1.3.5 die Behauptungen •

3.2.4 Bemerkung: Durch 3.2.2 ist auch die epi- bzw. bireflektive Hülle von (I,μ) in U-Near, C-Near und R-Near beschrieben.

§ 3.3 Die bireflektiven Hüllen von D_2, $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$

Der zweipunktige diskrete N-Raum wird mit (D_2,α) bezeichnet.

3.3.1 Definition: Sei X eine Menge. Dann heißt $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{P}(X)$ Zerlegung von X, falls gilt:

(1) $\bigcup \mathfrak{Z} = X$,

(2) Ist $Z \in \mathfrak{Z}$ und $Z' \in \mathfrak{Z}$ mit $Z \neq Z'$, so folgt $Z \cap Z' = \emptyset$.

3.3.2 Definition: Ein N-Raum (X,ξ) heißt nulldimensional, wenn jede N-Überdeckung $\alpha \in \xi$ von einer Zerlegung $\mathfrak{Z} \in \xi$ verfeinert wird.
Die Unterkategorie der nulldimensionalen N-Räume wird mit OdimNear bezeichnet.

3.3.3 Bemerkung: (1) OdimNear ist gerade die Klasse aller N-Räume, die eine Dimension [28] kleiner oder gleich Null besitzen.

(2) OdimNear ist eine bireflektive Unterkategorie von Near. Der zugehörige Bireflektor D ordnet jedem N-Raum (X,ξ) den nulldimensionalen N-Raum (X,ξ_d) zu, wobei

$\xi_d = \{\alpha \subset \mathfrak{P}(X) \mid$ Es gibt eine Zerlegung $\mathfrak{Z} \in \xi$ mit $\mathfrak{Z} < \alpha\}$.

(3) OdimNear ist abgeschlossen gegenüber der Bildung von Unterobjekten, Produkten und Coprodukten.

(4) OdimNear ist identisch mit der Klasse der nichtarchimedischen uniformen Räume ([11], [41]).

(5) Die diskreten und indiskreten N-Räume sind nulldimensional.

(6) Die "nulldimensionalisierbaren" topologischen Räume, das sind diejenigen topologischen Räume, die eine verträgliche nulldimensionale N-Struktur besitzen, sind gerade die topologisch - nulldimensionalen Räume ([1] ,[11]) .

(7) Die topologischen und nulldimensionalen N-Räume sind die ultraparakomkakten topologischen Räume (zur Definition siehe [11]). Dieses Resultat ist von besonderem Interesse: Es läßt in Analogie zu den parakompakten Räumen [25] eine Interpretation der nulldimensionalen N-Räume als die "richtige" Kategorie zur Untersuchung von Problemen mit ultraparakompakten Räumen zu.

3.3.4 Satz: Für einen N-Raum (X,ξ) sind äquivalent:

(1) $(X,\xi) \in BH_{\underline{Near}}(\{(D_2,\alpha)\})$,

(2) $(X,\xi) \in \underline{C\text{-}Near} \cap \underline{OdimNear}$,

(3) $\hat{\xi}$ besitzt eine Basis aus endlichen Zerlegungen,

(4) $\hat{\xi}$ besitzt eine Subbasis aus zweielementigen Zerlegungen.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2)

(D_2,α) ist ein kontigualer und nulldimensionaler N-Raum. Da C-Near und OdimNear bireflektive Unterkategorien von Near sind, folgt

$$BH_{\underline{Near}}(\{(D_2,\alpha)\}) \subset \underline{C\text{-}Near} \cap \underline{OdimNear}$$

(2) $\Rightarrow$ (3)

Das folgt aus der Definition von C-Near und OdimNear.

(3) $\Rightarrow$ (4)

(X,ξ) ist offenbar nulldimensional und deshalb uniform.

Gemäß ([32],II.36) wird dann jede endliche $\hat{\xi}$-Überdeckung von einem endlichen Schnitt von zweielementigen $\hat{\xi}$-Überdeckungen verfeinert.

(4) $\Rightarrow$ (1)

Ist $\alpha \in \hat{\xi}$, so existieren zweielementige Zerlegungen $\mathcal{L}_i \in \hat{\xi}$, $i \in \{1,\dots n\}$, mit $\mathcal{L}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{L}_n \prec \alpha$. Jedes $\mathcal{L}_i$ ist von der Form $\{B_i, X \setminus B_i\}$. Man definiert zu jedem $i \in \{1,\dots n\}$ $f_i : X \longrightarrow D_2$ durch $f_i[B_i] = 0$ und $f_i[X \setminus B_i] = 1$. Diese Abbildungen sind N-stetig und erfüllen $f_1^{-1}\mathcal{D} \wedge \dots \wedge f_n^{-1}\mathcal{D} \prec \alpha$, wobei $\mathcal{D} = \{\{0\},\{1\}\}$, also $\mathcal{D} \in \hat{\alpha}$ ist. Gemäß 1.1.4 ist dann (X,ξ) ein Element der bireflektiven Hülle von (D_2,α) in Near •

3.3.5 Satz: Der zu $BH_{Near}(\{(D_2,\alpha)\})$ gehörige Bireflektor BD ist das Kompositum $C \circ D$ des zu C-Near gehörigen Bireflektors C ([26],4.12) mit dem zu OdimNear gehörigen Bireflektor D (3.3.3(2)). Somit ordnet BD jedem N-Raum (X,ξ) den N-Raum (X,ξ_{bd}) zu,

wobei $\xi_{bd} = \{\alpha \in \mathfrak{P}(X) \mid$ Es gibt eine endliche Zerlegung $\mathcal{Z} \in \hat{\xi}$ mit $\mathcal{Z} \prec \alpha\}$

ist.

Beweis: Das Bild eines nulldimensionale N-Raumes unter dem kontigualen Bireflektor C ist stets wieder nulldimensional •

3.3.6 Satz: Für einen N-Raum (X,ξ) sind äquivalent:

(1) $(X,\xi) \in BH_{Near}(\{(D_2,\alpha)\})$,

(2) $(X,\xi) \in$ C-Near $\cap$ OdimNear $\cap$ Near-1,

(3) $\hat{\xi}$ besitzt eine Subbasis $\hat{\sigma}$ aus zweielementigen Zerlegungen mit der Eigenschaft: Für alle $x,y \in X$ mit $x \neq y$ existiert ein $S \subset X$ mit $x \in S$, $y \notin S$ und $\{S, X \setminus S\} \in \hat{\sigma}$.

Beweis: Gemäß 1.2.5(2) gilt

$$EH_{\underline{Near}}(\{(D_2,\alpha)\}) = BH_{\underline{Near}}(\{(D_2,\alpha)\}) \cap \underline{Near\text{-}1} .$$

Daraus ergibt sich mit 3.3.4 die Behauptung •

3.3.7 Satz: Der zu $EH_{\underline{Near}}(\{(D_2,\alpha)\})$ gehörige Epireflektor ED ist das Kompositum N1∘BD .

Beweis: 3.3.5, 1.1.6(5) •

3.3.8 Korollar:

(1) Die bireflektive Hülle von (D_2,α) in $\underline{T\text{-}Near}$ sind die topologisch-nulldimensionalen Räume.

(2) Die epireflektive Hülle von (D_2,α) in $\underline{T\text{-}Near}$ sind die topologisch-nulldimensionalen T_1-Räume.

Beweis: Aus 3.3.3(6) und 1.3.2 bzw. 1.3.5 erhält man

(1) $BH_{\underline{T\text{-}Near}}(\{(D_2,\alpha)\}) = T\left[BH_{\underline{Near}}(\{(D_2,\alpha)\})\right] =$

$= T\left[\underline{C\text{-}Near} \cap \underline{OdimNear}\right] =$

$= \{\text{topologisch-nulldimensionale Räume}\}$.

(2) $EH_{\underline{T\text{-}Near}}(\{(D_2,\alpha)\}) = T\left[EH_{\underline{Near}}(\{(D_2,\alpha)\})\right] =$

$= T\left[\underline{C\text{-}Near} \cap \underline{OdimNear} \cap \underline{Near\text{-}1}\right] =$

$= \{\text{topologisch-nulldimensionale } T_1\text{-Räume}\}$ •

Für beliebige unendliche Kardinalzahlen k sei D_k die Menge aller Ordinalzahlen, die kleiner als k sind. Mit k+1 wird die auf k folgende Kardinalzahl bezeichnet. Die diskrete N-Struktur auf D_k wird für alle k mit α bezeichnet.

$\underline{(k+1)\text{-}C\text{-}Near}$ ist die Klasse der N-Räume, die eine Basis von Überdeckungen einer Mächtigkeit kleiner oder gleich k besitzen.

3.3.9 Satz: Ist k eine unendliche Kardinalzahl, so sind für einen N-Raum (X,ξ) äquivalent:

(1) $(X,\xi) \in BH_{Near}(\{(D_k,\alpha)\})$,

(2) $(X,\xi) \in (k+1)\text{-C-}Near \cap 0dimNear$,

(3) ξ besitzt eine Basis aus Zerlegungen einer Kardinalität kleiner oder gleich k .

Beweis: Analog zu 3.3.4 •

3.3.10 Bemerkung: (1) Die epireflektive Hülle von (D_k,α) erhält man durch Schnitt der bireflektiven Hülle mit Near- .

(2) Den zu $BH_{Near}(\{(D_k,\alpha)\})$ gehörigen Bireflektor erhält man wie BD in 3.3.5. Durch Komposition mit N1 erhält man den zu $EH_{Near}(\{(D_k,\alpha)\})$ gehörigen Epireflektor (1.1.6(5)).

(3) Da $D_{\aleph_0} = \mathbb{N}$ besteht die bireflektive Hülle der natürlichen Zahlen aus jenen N-Räumen, die eine Basis aus abzählbaren Zerlegungen besitzen.

3.3.11 Satz: (1) Die bireflektive Hülle $BH_{Near}(\{(D_2,\alpha)\})$ des zweipunktigen diskreten N-Raumes in Near ist die kleinste bireflektive Unterkategorie von Near , die die Klasse Ind der indiskreten N-Räume echt umfaßt.

(2) Die epireflektive Hülle $EH_{Near}(\{(D_2,\alpha)\})$ ist die kleinste epireflektive Unterkategorie von Near, die die Klasse P der höchstens einpunktigen Räume echt umfaßt.

Beweis: (1) Sei B eine bireflektive Unterka-

kategorie von Near mit $\underline{\text{Ind}} \subsetneq \underline{B}$. Dann existiert ein $\underline{B}$-Objekt (X,ξ) mit $(X,\xi) \notin \underline{\text{Ind}}$. Es folgt, daß es ein $\mathcal{A} \in \widehat{\xi}$ gibt mit $X \notin \mathcal{A}$. Also ist $\text{int}_\xi \mathcal{A} \in \widehat{\xi}$ und es gibt ein $A \in \mathcal{A}$ mit $\phi \subsetneq \text{int}_\xi A \subsetneq X$.

Sei $x \in \text{int}_\xi A$ und $y \in X \setminus A$. Dann ist $\{X \setminus \{x\}, A\} \in \widehat{\xi}$. Versieht man nun die Menge $D_2 := \{x,y\}$ mit der Relativstruktur α bzgl. der Inklusion $i: D_2 \longrightarrow X$ und $\widehat{\xi}$, so erhält man $i^{-1}\{X \setminus \{x\}, A\} = \{\{x\}, \{y\}\} \in \widehat{\alpha}$, d.h. (D_2,α) ist diskret. Also gehört der zweipunktige diskrete N-Raum zu $\underline{B}$, was $BH_{\underline{\text{Near}}}(\{(D_2,\alpha)\}) \subset \underline{B}$ bedingt.

(2) Sei $\underline{E}$ eine epireflektive Unterkategorie von Near mit $\underline{P} \subsetneq \underline{E}$. Enthält $\underline{E}$ einen N-Raum, der kein N1-Raum ist, dann ist $\underline{E}$ sogar bireflektive in Near (1.2.5(2)), so daß man wegen (1) fertig ist. Sei nun $\underline{E} \subset \underline{\text{Near}}\text{-}\underline{1}$. Es gibt ein $\underline{E}$-Objekt mit mehr als nur einem Element. Jeder zweipunktige Unterraum dieses Objekts ist dann diskret und es folgt

[illegible] $\subset$.

3.3.1. Korollar [40]: (1) Die topologisch-nulldimensionalen Räume, d.h. diejenigen topologischen Räume, die eine Basis aus offen-abgeschlossenen Mengen besitzen, sind die kleinste bireflektive Unterkategorie von Top, die die indiskreten topologischen Räume echt umfaßt.

(2) Die topologisch-nulldimensionalen T_1-Räume sind die kleinste epireflektive Unterkategorie von Top, die die Klasse $\underline{P}$ der höchstens einpunktigen Räume echt umfaßt.

Beweis: (1) folgt aus 3.3.11(1), 1.3.2 und aus

$$T\left[\underline{\text{C-Near}} \cap \underline{\text{OdimNear}}\right] = \left\{\begin{matrix}\text{topologisch-nulldimensionale} \\ \text{Räume}\end{matrix}\right\}.$$

(2) ergibt sich aus 3.3.11(2), 1.3.5 und

$$T\left[\underline{C\text{-}Near} \cap \underline{OdimNear} \cap \underline{Near\text{-}1}\right] = \left\{\begin{array}{l}\text{topologisch nulldimen-}\\ \text{sionale } T_1\text{-Räume}\end{array}\right\}.$$

3.3.13 Bemerkung: Die Aussage des 3.3.11 ist in gleicher Weise für Pr-Near, C-Near, U-Near und R-Near zutreffend.

3.3.14 Lemma: Jeder N-Raum (X,ξ) mit einer endlichen, nichtleeren unterliegenden Menge X ist topologisch, kontigual und nulldimensional. Er besitzt eine Zerlegung $\mathfrak{z} \in \hat{\xi}$, die $\hat{\xi}$ erzeugt.

Beweis: Wegen ([17],7.11) ist (X,ξ) ein topologischer N-Raum, der trivialerweise kontigual ist. Definiert man nun zu jedem $x \in X$

$$O_x := \bigcap\{U \subset X \mid x \in U \text{ und } U \text{ ist offen}\},$$

so ist O_x als endlicher Schnitt von offenen Mengen erneut offen. Setzt man $\mathfrak{z} := \{O_x \mid x \in X\}$, so erhält man eine Zerlegung von X aus offenen Mengen. Daraus folgt $\mathfrak{z} \in \hat{\xi}$. Ist nun $\mathfrak{A} \in \hat{\xi}$, so ergibt sich $\mathfrak{z} < \mathfrak{A}$ aus $\mathfrak{z} < \operatorname{int}_\xi \mathfrak{A}$ und $\operatorname{int}_\xi \mathfrak{A} < \mathfrak{A}$. Somit ist $\{\mathfrak{z}\}$ eine Basis von $\hat{\xi}$. Da $\mathfrak{z}$ eine Zerlegung ist, folgt, daß (X,ξ) nulldimensional ist •

3.3.15 Satz: Ein N-Raum (X,ξ) mit endlicher, nichtleerer unterliegender Menge X, erzeugt entweder

- die Klasse der proximalen, nulldimensionalen N-Räume, oder
- die Klasse der proximalen, nulldimensionalen N1-Räume, oder
- die Klasse der indiskreten Räume, oder
- die Klasse der höchstens einpunktigen Räume.

Genauer gilt: (1) Sind der zweipunktige diskrete N-Raum (D_2,α) und der zweipunktige indiskrete N-Raum (I_2,ω) Unterräume von (X,ξ) dann gilt

$EH_{\underline{Near}}(\{(X,\xi)\})$ = {proximale nulldimensionale N-Räume}.

(2) Ist nur (D_2,α) Unterraum von (X,ξ), nicht jedoch (I_2,ω), dann gilt

$EH_{\underline{Near}}(\{(X,\xi)\})$ = {proximale nulldimensionale N1-Räume}.

(3) Ist nur (I_2,ω) Unterraum von (X,ξ), nicht jedoch (D_2,α), so gilt

$EH_{\underline{Near}}(\{(X,\xi)\}) = \underline{Ind}$.

(4) Ist weder (D_2,α) noch (I_2,ω) ein Unterraum von (X,ξ), dann gilt

$EH_{\underline{Near}}(\{(X,\xi)\}) = \underline{P}$.

Beweis: zu (1)

Wegen 3.3.14 gilt

$EH_{\underline{Near}}(\{(X,\xi)\}) \subset$ {proximale nulldimensionale N-Räume}.

Da (X,ξ) kein N1-Raum ist, sind die epireflektive und die bireflektive Hülle von (X,ξ) gleich (1.2.5(2)).

Weil (D_2,α) Unterraum von (X,ξ) ist, hat man nun

$$BH_{\underline{Near}}(\{(D_2,\alpha)\}) \subset EH_{\underline{Near}}(\{(X,\xi)\}) .$$

Wegen 3.3.4 ist man nun fertig.

zu (2)

(X,ξ) ist ein N1-Raum, und es folgt mit 3.3.6:

{proximale nulldimensionale N1-Räume} =

$$= EH_{\underline{Near}}(\{(D_2,\alpha)\}) \subset EH_{\underline{Near}}(\{(X,\xi)\}) \subset$$

$\subset$ {proximale nulldimensionale N1-Räume} .

zu (3)

(X,ξ) ist indiskret, und da (I_2,ω) Unterraum von (X,ξ) ist, erhält man

$$\underline{Ind} \subset EH_{\underline{Near}}(\{(I_2,\omega)\}) \subset EH_{\underline{Near}}(\{(X,\xi)\}) \subset \underline{Ind} .$$

zu (4)

X muß einpunktig sein. Die Behauptung folgt dann aus 3.1.7(4) •

3.3.16 Bemerkung: Die Anwendung der Sätze 1.3.2 und 1.3.5 auf die Ergebnisse des vorausgehenden Satzes liefert eine Klassifizierung der aus endlichen topologischen Räumen in T-Near erzeugten Kategorien. Eine Darstellung dieses Sachverhalts findet sich bei T.Marny ([40],4.4.6).

Sei $(\mathbb{Q},\tau)$ die Menge der rationalen Zahlen versehen mit der natürlichen topologischen N-Struktur τ .

3.3.17 Satz: Die bireflektive und epireflektive Hülle von $(\mathbb{Q},\tau)$ in Near stimmt mit den entsprechenden Hüllen von $(\mathbb{N},\alpha)$ in Near überein. Genauer gilt:

(1) Für einen N-Raum (X,ξ) sind äquivalent:

(a) $(X,\xi) \in BH_{Near}(\{(\mathbb{Q},\tau)\})$,

(b) $\widehat{\xi}$ besitzt eine Basis aus abzählbaren Zerlegungen.

(2) Für einen N-Raum (X,ξ) sind äquivalent:

(a) $(X,\xi) \in EH_{Near}(\{(\mathbb{Q},\tau)\})$,

(b) $\widehat{\xi}$ besitzt eine Basis $\widehat{\sigma}$ aus abzählbaren Zerlegungen mit der Eigenschaft: Für alle $x,y \in X$ mit $x \neq y$ existiert ein $S \subset X$ mit $x \in S$, $y \notin S$ und $\{S, X \setminus S\} \in \widehat{\sigma}$.

Beweis: zu (1)

(b) $\Rightarrow$ (a) $(\mathbb{N},\alpha)$ ist ein N-Unterraum von $(\mathbb{Q},\tau)$ bzgl. der Inklusion. Es folgt

$$BH_{Near}(\{(\mathbb{N},\alpha)\}) \subset BH_{Near}(\{(\mathbb{Q},\tau)\}) ,$$

was wegen 3.3.9 bzw. 3.3.10(3) die Behauptung beweist.

(a) $\Rightarrow$ (b) Man ist fertig, wenn man zeigen kann, daß zu jeder Überdeckung $\mathcal{O} \in \hat{\tau}$ eine abzählbare Zerlegung $\mathfrak{Z} \in \hat{\tau}$ mit $\mathfrak{Z} < \mathcal{O}$ existiert.

Sei $\mathcal{O} \in \hat{\tau}$ und $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Aufzählung von $\mathbb{Q}$.

Nun definieren wir:

i=1: Zu x_1 existiert ein $A \in \mathcal{O}$ und ein $\varepsilon > 0$ mit

$$S(x_1, \varepsilon) = \{q \in \mathbb{Q} \mid |q - x_1| < \varepsilon\} \subset A .$$

Weiterhin existieren irrationale Zahlen $i_1, j_1 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 - \varepsilon < i_1 < x_1 < j_1 < x_1 + \varepsilon$.

Nun sei $B_1 := [i_1, j_1] \cap \mathbb{Q}$, wobei das Intervall in $\mathbb{R}$ gebildet wurde. B_1 ist dann in $\mathbb{Q}$ offen und abgeschlossen.

i=n-1:

Es seien offen/abgeschlossene Mengen $B_1, \ldots, B_{n-1}$ in $\mathbb{Q}$ definiert, die paarweise disjunkt sind.

i=n: Sei $k := \min\{i \in \mathbb{N} \mid x_i \in \mathbb{Q} \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_{n-1})\}$.

Dann existiert zu x_k ein $\varepsilon > 0$ und ein $A \in \mathcal{O}$ mit $S(x_k, \varepsilon) \subset A \cap \mathbb{Q} \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_{n-1})$, denn $\mathbb{Q} \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_{n-1})$ ist offen in $\mathbb{Q}$. Erneut wählt man nun irrationale Zahlen $i_k, j_k \in \mathbb{R}$ mit

$$x_k - \varepsilon < i_k < x_k < j_k < x_k + \varepsilon .$$

Definiere $B_n := [i_k, j_k] \cap \mathbb{Q}$.

Diese Konstruktion liefert eine abzählbare Zerlegung $\mathfrak{Z} := \{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, die $\mathfrak{Z} < \mathcal{O}$ und $\mathfrak{Z} \in \hat{\tau}$ erfüllt, da $(\mathbb{Q}, \tau)$ ein topologischer N-Raum und $\bigcup \mathrm{int}_\tau \mathfrak{Z} = \bigcup \mathfrak{Z} = \mathbb{Q}$ ist. Das war zu zeigen.

zu (2)

Das folgt aus (1) und 1.2.5(2). •

3.3.18 Satz: (1) Die bireflektive Hülle der Unterkategorie Dis aller diskreten N-Räume in Near ist die Kategorie OdimNear der nulldimensionalen N-Räume.

(2) Die epireflektive Hülle von Dis in Near ist die Kategorie OdimNear-1 aller nulldimensionalen N1-Räume.

Beweis: zu (1)

Da $\mathrm{Dis} \subset \mathrm{OdimNear}$ (3.3.3(4)) und OdimNear eine bireflektive Unterkategorie von Near ist (3.3.3(2)), folgt, daß die bireflektive Hülle von Dis in OdimNear enthalten ist.

Sei nun (X,ξ) ein nulldimensionaler N-Raum. Gemäß 1.1.4 ist zu zeigen, daß zu jeder Überdeckung $\mathcal{A} \in \widehat{\xi}$ endlich viele diskrete N-Räume $(D,\delta)_i$, $i \in \{1,\dots,n\}$, N-stetige Abbildungen $f_i:(X,\xi) \longrightarrow (D,\delta)_i$ und Überdeckungen $\mathcal{B}_i \in \widehat{\delta}_i$ existieren, so daß

$$f_1^{-1}\mathcal{B}_1 \wedge \dots \wedge f_n^{-1}\mathcal{B}_n \prec \mathcal{A}$$

gilt.

Da (X,ξ) nulldimensional ist, existiert eine Zerlegung $\mathcal{Z} \in \widehat{\xi}$ von X mit $\mathcal{Z} \prec \mathcal{A}$. Wir wählen die Überdeckung $\zeta := \{\{Z\} \mid Z \in \mathcal{Z}\}$ von $\mathcal{Z}$ als erzeugendes Element einer N-Struktur Ω auf $\mathcal{Z}$, also

$$\widehat{\Omega} := \{\eta \subset \mathcal{P}(\mathcal{Z}) \mid \zeta < \eta\}.$$

Dann ist $(\mathcal{Z},\Omega)$ ein diskreter N-Raum, und die Abbildung $f:(X,\xi) \longrightarrow (\mathcal{Z},\Omega)$, die für alle $x \in X$ durch $f(x) := Z$ definiert wird, falls $x \in Z$, ist N-stetig. Insbesondere gilt für $\zeta \in \widehat{\Omega}$ $f^{-1}\zeta \prec \mathcal{A}$.

zu (2)

Das folgt aus 1.2.5(2) •

Kapitel 4

Hausdorffsche Nearness-Räume

§ 4.1 Die Kategorie HausNear

Jeder T_2-kompakte topologische Raum ist abgeschlossener topologischer Unterraum eines Produktes von Kopien des Einheitsintervalls. Diese Charakterisierung T_2-kompakter Räume von Tychonoff 51 gab Anlaß zur Untersuchung von Raumklassen, die sich in Analogie zu den T_2-kompakten Räumen durch Bildung von abgeschlossenen Unterräumen und Produkten aus einer Klasse $\underline{K}$ von topologischen Hausdorff-Räumen erzeugen lassen [43], [12] [6], [18]. Diese Konstruktion ist identisch mit der Bildung der epireflektiven Hülle von $\underline{K}$ in der Kategorie Haus der topologischen Hausdorff-Räume.
H.Herrlich [23] schlug vor, als Analogon zu Haus in Top die Kategorie R-Near-1 in Near zu verwenden. Jedoch ist R-Near-1 eine zu kleine Kategorie, denn topologische Hausdorff-Räume, die nicht regulär sind, gehören nicht zu R-Near-1. Die Kategorie Sep-Near der separierten N-Räume [26] ist einer intuitiven Vorstellung von hausdorffschen N-Räumen sehr nahe. Jedoch erfüllt die Klasse der Morphismen in Sep-Near nicht die Eigenschaften, daß (a) die Epimorphismen gerade die dichten N-stetigen Abbildungen und (b) die extremen Monomorphismen gerade die abgeschlossenen N-Einbettungen sind.
Im Folgenden wird eine Kategorie HausNear betrachtet, die alle topologischen Hausdorff-Räume enthält, und deren Morphismen die gewünschten Eigenschaften besitzen.

4.1.1 Satz: Für einen N-Raum (X,ξ) sind äquivalent:

(1) (X,ξ_t) ist ein T_2-Raum.

(2) Für alle $x,y\in X$ mit $x\neq y$ existieren $U_x, U_y \subset X$ mit $\{\{x\},X\setminus U_x\}\notin\xi$, $\{\{y\},X\setminus U_y\}\notin\xi$ und $U_x\cap U_y = \emptyset$.

(3) Für alle $x,y\in X$ mit $x\neq y$ existiert ein $E\subset X$ mit $\{\{x\},E\}\notin\xi$ und $\{\{y\},X\setminus E\}\notin\xi$.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2)
Ist (X,ξ_t) ein T_2-Raum, so existieren für alle $x,y\in X$ mit $x\neq y$ offene und disjunkte Umgebungen U_x bzw. U_y. Da (X,ξ) ein R_0-Raum ist, gilt $cl_\xi\{x\}\cap cl_\xi X\setminus U_x = \emptyset$ und $cl_\xi\{y\}\cap cl_\xi X\setminus U_y = \emptyset$. Es folgt $\{\{x\},X\setminus U_x\}\notin\xi$ und $\{\{y\},X\setminus U_y\}\notin\xi$.

(2) $\Rightarrow$ (3)
Wählt man $E := U_y$, so gilt $\{\{y\},X\setminus E\}\notin\xi$. Da $E\subset X\setminus U_x$, gilt $\{\{x\},X\setminus U_x\} \leq \{\{x\},E\}$, so daß man $\{\{x\},E\}\notin\xi$ erhält.

(3) $\Rightarrow$ (1)
Für $x,y\in X$ mit $x\neq y$ definiert man $U_x := int_\xi X\setminus E$ und $U_y := int_\xi E$. Dann sind U_x und U_y offene und disjunkte Mengen. Da $x\notin cl_\xi E$ folgt $x\in X\setminus cl_\xi E = int_\xi X\setminus E = U_x$, und aus $y\notin cl_\xi X\setminus E$ ergibt sich $y\in int_\xi E = U_y$.

4.1.2 Definition: Ein N-Raum (X,ξ) heißt hausdorffsch, wenn er die obigen äquivalenten Bedingungen erfüllt. Die Unterkategorie aller hausdorffschen N-Räume wird mit HausNear bezeichnet.

4.1.3 Bemerkung: Die Eigenschaft 4.1.1(3) wurde bereits

von S.A.Naimpally [45] betrachtet. Die so definierte Kategorie umfaßt die Klasse der separierten N1-Räume ([26], 10.2).

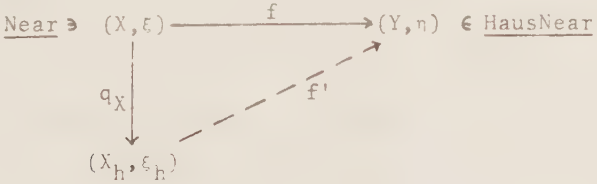
4.1.4 Satz: HausNear ist eine extrem-epireflektive Unterkategorie von Near . Ist (X,ξ) ein N-Raum, und sind $x,x' \in X$ so gelte $x \sim x'$ genau dann, wenn für jede N-stetige Abbildung f in ein HausNear-Objekt $f(x) = f(x')$ gilt. Sei $(X,\xi)_h$ der Quotient von X nach $\sim$, versehen mit der finalen N-Stuktur bzgl. ξ und der Quotientenabbildung q_X.
Dann ist die Zuordnung $H:(X,\xi) \longmapsto (X,\xi)_h$ der zu HausNear gehörige Epireflektor.
$(X,\xi)_h$ wird auch mit (X_h,ξ_h) bezeichnet.

Beweis: Die Behauptung des Satzes ergibt sich aus folgenden Aussagen:

(1) HausNear ist epireflektiv in Near wegen Theorem A.13 in [26].

(2) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

(3) Universelle Eigenschaft von q_X:
Sei (Y,η) ein hausdorffscher N-Raum und $f:(X,\xi) \longrightarrow (Y,\eta)$ eine N-stetige Abbildung. Man definiert $f':(X_h,\xi_h) \longrightarrow (Y,\eta)$ durch $f'(\bar{x}) := f(x)$, wenn $x \in X$ ein Repräsentant von $\bar{x} \in X_h$ ist.



f' ist wohl definiert, da f eine N-stetige Abbildung in einen Hausdorff-N-Raum ist, und deshalb auf jeder Äquivalenzklasse konstant sein muß. f' ist

auch N-stetig, denn ξ_h ist final bzgl. q_X und ξ, und $f' \circ q_X = f$ ist N-stetig. Außerdem ist f' die einzige N-stetige Abbildung, die obiges Diagramm kommutativ macht, da q_X ein Epimorphismus ist.

(4) Für jeden N-Raum (X,ξ) ist $(X,\xi)_h$ ein Hausdorff-N-Raum. Sei nämlich $\overline{x},\overline{y} \in X_h$ mit $\overline{x} \neq \overline{y}$. Dann existiert ein Hausdorff-N-Raum (Y,η) und eine N-stetige Abbildung $f:(X,\xi) \longrightarrow (Y,\eta)$ derart, daß $f(x) \neq f(y)$ ist, wobei $x \in X$ und $y \in X$ Repräsentanten von $\overline{x} \in X_h$ und $\overline{y} \in X_h$ sind. Gemäß (3) existiert eine eindeutige N-stetige Abbildung f', die obiges Diagramm kommutativ macht, d.h. $f'(x) \neq f'(y)$. Also existiert ein $E \subset Y$ mit $\{\{f'(x)\},E\} \notin \eta$ und $\{\{y\},Y \setminus E\} \notin \eta$. Dann erfüllt $F := f'^{-1}[E]$ die Eigenschaft $\{\{x\},F\} \notin \xi_h$ und $\{\{y\},X_h \setminus F\} \notin \xi_h$, so daß (X_h,ξ_h) ein hausdorffscher N-Raum ist •

4.1.5 Satz: HausNear ist abgeschlossen bezüglich der Bildung von Produkten, Unterobjekten und Coprodukten in Near.

Beweis: Als epireflektive Unterkategorievon Near ist HausNear abgeschlossen gegenüber der Bildung von Produkten und Unterobjekten. Sei nun I eine Menge und $(X_i,\xi_i)_{i \in I}$ eine Familie von HausNear-Objekten. Das Coprodukt dieser Familie werde mit (X,ξ) bezeichnet und die Injektionen mit $j_i:(X_i,\xi_i) \longrightarrow (X,\xi)$ für jedes $i \in I$. Gemäß [30] gilt dann für $\alpha \subset \mathcal{P}(X)$:

$$\alpha \in \xi \iff \text{Es gibt ein } i \in I \text{ mit } j_i^{-1}\alpha \in \xi_i .$$

Sei nun $x,y \in X$ mit $x \neq y$.

Fall 1: $x \in j_i[X_i]$, $y \in j_k[X_k]$, $i \neq k$.

Dann ist $\{\{x\},j_k[X_k]\} \notin \xi$ und $\{\{y\},X \setminus j_k[X_k]\} \notin \xi$, und

mit 4.1.1(3) ist man fertig.

Fall 2: $x,y \in j_i[X_i]$.

Dann existiert $E \subset X_i$ mit $\{\{j_i^{-1}(x)\},E\} \notin \xi_i$ und $\{\{j_i^{-1}(y)\},X\setminus E\} \notin \xi_i$, so daß offenbar für $F := j_i[E]$ die Bedingung 6.1.1(3) erfüllt ist •

Die Kategorie der topologischen Hausdorff-Räume wird wie üblich mit Haus bezeichnet.

4.1.6 Satz:

(1) Haus = HausNear ∩ T-Near ,

(2) Haus ist eine bicoreflektive Unterkategorie von HausNear mit T (2.1.10) als Bicoreflektor,

(3) Haus ist eine epireflektive Unterkategorie von T-Near mit H als Epireflektor.

Beweis: Wegen $T[\text{HausNear}] = \text{Haus}$ folgt die Behauptung des Satzes aus 1.3.7 •

4.1.7 Satz: HausNear ist nicht einfach erzeugt in Near.

Beweis: Da die Klasse der diskreten N-Räume in HausNear enthalten ist, folgt die Behauptung aus 3.1.5.2 •

Den zu Near-1 gehörigen Epireflektor bezeichnen wir wie üblich mit N1 .

4.1.8 Bemerkung: (1) HausNear ist eine epireflektive Unterkategorie von Near-1 mit H als Epireflektor, da jeder hausdorffsche N-Raum ein N1-Raum ist.

(2) R-Near-1 ist eine epireflektive Unterkategorie von HausNear mit R1:= N1∘R als Epireflektor. R wird in ([26],11.10) beschrieben.

(3) U-Near-1 ist eine epireflektive Unterkategorie von HausNear mit U1:= N1∘U als Epireflektor. U wird in ([26],4.18) beschrieben.

(4) Pr-Near-1 ist eine epireflektive Unterkategorie von HausNear mit Pr1:= N1∘Pr als Epireflektor. Pr wird in ([26],4.23) beschrieben.

4.1.9 Lemma: Sei D eine Unterkategorie von Near mit der Eigenschaft, daß jedes D-Objekt eine unterliegende hausdorffsche Topologie besitzt. Dann ist jede dichte N-stetige Abbildung zwischen D-Objekten ein Epimorphismus in D.

Beweis: Es seien (X,ξ), (Y,η) und (Z,ζ) D-Objekte und $f:(X,\xi)\longrightarrow(Y,\eta)$ eine dichte N-stetige Abbildung. Weiterhin seien $\alpha,\beta:(Y,\eta)\longrightarrow(Z,\zeta)$ N-stetige Abbildungen mit $\alpha\circ f = \beta\circ f$.

$$\begin{array}{ccccc}
(X,\xi) & \xrightarrow{f} & (Y,\eta) & \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} & (Z,\zeta) \\
{\scriptstyle 1_X}\uparrow & & {\scriptstyle 1_Y}\uparrow & & {\scriptstyle 1_Z}\uparrow \\
(X,\xi_t) & \xrightarrow{f} & (Y,\eta_t) & \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} & (Z,\zeta_t)
\end{array}$$

Dann sind (X,ξ_t), (Y,η_t) und (Z,ζ_t) T_2-Räume. Es gilt $cl_\eta f[X] = Y$ woraus $cl_{\eta_t} f[X] = Y$ folgt. Nun folgt $\alpha=\beta$, da zwei stetige Abbildungen in einen

T_2-Raum identisch sind, falls sie auf einer dichten Teilmenge übereinstimmen •

4.1.10 Lemma: Sei $\underline{A}$ eine topologische Unterkategorie (1.1.1) von $\underline{Near}$ und $\underline{E}$ eine epireflektive Unterkategorie von $\underline{A}$ mit der Eigenschaft, daß ein $\underline{E}$-Morphismus genau dann ein $\underline{E}$-Epimorphismus ist, wenn er dicht ist.
Dann sind für einen $\underline{E}$-Morphismus $f:(X,\xi)\longrightarrow(Y,\eta)$ folgende Aussagen äquivalent:
(1) f ist ein extremer Monomorphismus in $\underline{E}$.
(2) f ist eine abgeschlossene $\underline{A}$-Einbettung, d.h.
i) f ist injektiv,
ii) ξ ist $\underline{A}$-initial bzgl. f und η,
iii) $cl_\eta f[X] = f[X]$.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2)
Ein extremer Monomorphismus in $\underline{E}$ ist stets ein extremer Monomorphismus in $\underline{A}$, so daß i) und ii) gemäß 1.1.2(3) erfüllt sind. Man definiert $g:X\longrightarrow cl_\eta f[X]$ durch $g(x) = f(x)$ für $x\in X$, und versieht $cl_\eta f[X]$ mit der $\underline{A}$-initialen Struktur ζ bzgl. der Inklusion i und η.

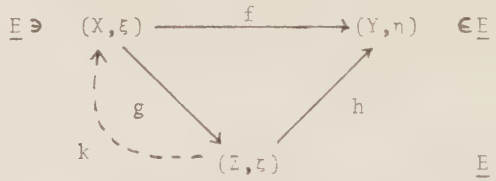
$$\begin{array}{ccc} \underline{E}\ni\ (X,\xi) & \xrightarrow{\ f\ } & (Y,\eta)\ \in\underline{E} \\ & {\scriptstyle g}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle i} & \\ & (cl_\eta f\,X\,,\zeta) & \in\underline{E} \end{array}$$

Dann ist i ein extremer Monomorphismus in $\underline{A}$, und da $\underline{E}$ abgeschlossen ist bezüglich der Bildung von Unterobjekten, ist auch $(cl_\eta f[X],\zeta)$ ein $\underline{E}$-Objekt.
Die Abbildung g ist dicht, da aus $x\in cl_\eta f[X]$ stets $\{\{x\},f[X]\}\in\eta$ und somit $\{\{x\},g[X]\}\in\zeta$ folgt, was $x\in cl_\zeta g[X]$ bedingt. Da g ein $\underline{E}$-Morphismus ist, folgt

nun nach Voraussetzung, daß g ein $\underline{E}$-Epimorphismus ist. Weil f ein extremer Monomorphismus in $\underline{E}$ ist, muß nun g ein Isomorphismus in $\underline{E}$ und damit in $\underline{A}$ sein. Deshalb ist g bijektiv (1.1.2) und es folgt $f[X] = g[X] = cl_Y f[X]$.

$(2) \Rightarrow (1)$

Da f injektiv ist, ist f wegen 1.1.2(1) ein Monomorphismus in $\underline{A}$ und somit in $\underline{E}$.
Sei $(Z,\zeta) \in \underline{E}$, $g:(X,\xi) \longrightarrow (Z,\zeta)$ ein Epimorphismus in $\underline{E}$, und $h:(Z,\zeta) \longrightarrow (Y,\eta)$ eine N-stetige Abbildung, so daß das folgende Diagramm kommutiert.



Nach Voraussetzung ist g dicht. Für $z \in Z$ gilt deshalb $\{\{z\}, g[X]\} \in \zeta$, und somit $\{\{h(z)\},(h\circ g)[X]\} = \{\{h(z)\}, f[X]\} \in \eta$. Da $f[X]$ in (Y,η) abgeschlossen ist, erhält man $h(z) \in f[X]$, so daß die folgende Abbildung

$$k:(Z,\zeta) \longrightarrow (X,\xi)$$
$$z \longmapsto f^{-1}(h(z))$$

definiert werden kann.
k ist N-stetig, da $f\circ k = h$ gilt, h N-stetig ist, und ξ $\underline{A}$-initial bezüglich f und η ist. Weiterhin gilt $k\circ g = f^{-1}\circ h\circ g = f^{-1}\circ f = 1_X$, und es folgt $g\circ k\circ g = g\circ 1_X = 1_Z\circ g$, also $g\circ k = 1_Z$, da g ein Epimorphismus ist. Damit ist gezeigt, daß g ein Isomorphimus in $\underline{E}$ ist •

4.1.11 Satz: Jeder Epimorphismus in $\underline{U}$-Near-1 und $\underline{Pr}$-Near-1 ist dicht.

Beweis: Wir zeigen die Aussage für U-Near-1 . Im anderen Fall geht man analog vor.
Wir nehmen an, es gäbe einen Epimorphismus

$$f:(X,\xi)\longrightarrow(Y,\eta)$$

in U-Near-1 , der nicht dicht ist. Dann existiert ein $y\in Y\setminus cl_\eta f[X]$ und es gilt $\{\{y\},f[X]\}\notin\eta$ bzw. $\{Y\setminus\{y\},Y\setminus f[X]\}\in\hat{\eta}$. Wegen 3.2.1 existiert nun eine N-stetige Abbildung

$$\alpha:(Y,\eta)\longrightarrow([0,1],\mu)\ ,$$

mit der Eigenschaft $\alpha(y)=1$ und $\alpha[f[X]]=\{0\}$.
Ist nun $\beta:(Y,\eta)\longrightarrow([0,1],\mu)$ die konstante Abbildung auf die Null, so gilt $\alpha\circ f=\beta\circ f$, jedoch $\alpha\neq\beta$.
Da $([0,1],\mu)$ ein proximaler N1-Raum ist, wurde alles gezeigt ●

4.1.12 Bemerkung: Der obige Satz findet sich auch bei G.Preuß ([47],9.6.25). Im dortigen Beweis wurden Diagonaluniformitäten verwendet.

4.1.13 Satz: Jeder Epimorphismus in HausNear ist dicht.

Beweis: Sei f ein Epimorphismus in HausNear. Wir verfahren im Folgenden wie in dem Beweis derselben Aussage für Haus [21] und nehmen an, daß f nicht dicht sei. Dann ist $cl_\eta f[X]$ in Y echt enthalten.

Man ist fertig, wenn man zwei verschiedene N-stetige Abbildungen v_1 und v_2 von (Y,η) in ein HausNear-Objekt (Z,ζ) angeben kann, die $v_1\circ f=v_2\circ f$ erfüllen. Das wäre ein Widerspruch zu der Eigenschaft von f, epimorph zu sein.
Definiere $A:=cl_\eta f[X]$. Es bezeichne Z die disjunkte Vereinigung von Y mit $Y\setminus A$: $Z=(Y\times\{1\})\cup((Y\setminus A)\times\{2\})$.
Die Abbildungen $v_1,v_2:Y\longrightarrow Z$ seien für $y\in Y$ wie

folgt definiert:

$$v_1(y) := (y,1) \quad , \quad v_2(y) := \begin{cases} (y,1) & \text{falls } y \in A \ , \\ (y,2) & \text{sonst} \ . \end{cases}$$

ζ bezeichne die finale N-Struktur auf Z bezüglich den Abbildungen $(v_i : (Y,\eta) \longrightarrow Z)_{i=1,2}$.

Die Abbildung $g : Z \longrightarrow Y$ sei für $z \in Z$ gegeben durch

$$\{g(z)\} := v_1^{-1}[\{z\}] \cup v_2^{-1}[\{z\}] \ .$$

Dann ist g N-stetig, denn für $i \in \{1,2\}$ ist $g \circ v_i = 1_Y$, und ζ ist final bezüglich v_1 und v_2 .

Da v_1 offenbar von v_2 verschieden ist, jedoch $v_1 \circ f = v_2 \circ f$ Gültigkeit besitzt, ist nur noch zu zeigen, daß (Z,ζ) ein hausdorffscher N-Raum ist.

Seien dazu $z_1, z_2 \in Z$ mit $z_1 \neq z_2$.

Fall 1: $g(z_1) \neq g(z_2)$.

Dann existiert ein $E \subset Y$ mit $\{Y \setminus \{g(z_1)\}, E\} \in \hat{\eta}$ und $\{Y \setminus \{g(z_2)\}, Y \setminus E\} \in \hat{\eta}$. Es folgt für $F := g^{-1}[E]$: $\{Z \setminus g^{-1}[g(z_1)], F\} \in \hat{\zeta}$ und $\{Z \setminus g^{-1}[g(z_2)], Z \setminus F\} \in \hat{\zeta}$. Da nun $z_i \in g^{-1}[g(z_i)]$ für $i \in \{1,2\}$ gilt, folgt schließlich $\{Z \setminus \{z_1\}, F\} \in \hat{\zeta}$ und $\{Z \setminus \{z_2\}, Z \setminus F\} \in \hat{\zeta}$.

Fall 2: $g(z_1) = g(z_2)$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $z_1 \in v_1[Y]$ und $z_2 \in v_2[Y]$. Man wäre insgesamt fertig, wenn $cl_\zeta v_2[Y] = v_2[Y]$ und somit aus Symmetriegründen auch $cl_\zeta v_1[Y] = v_1[Y]$ gültig wäre. Für $F := v_2[Y]$ würde dann folgen: $z_1 \notin cl_\zeta F$, also $\{\{z_1\}, F\} \notin \zeta$ und $\{\{z_2\}, v_1[Y]\} \notin \zeta$, also $\{\{z_2\}, Z \setminus F\} \notin \zeta$. Damit wäre dann 4.1.1(3) erfüllt.

So bleibt zu zeigen: $cl_\zeta v_2[Y] = v_2[Y]$.

Hierzu ist es notwendig, sich zunächst die Konstruktion

von $\zeta \subset \mathfrak{P}^2(Z)$ anzusehen. Im ersten Schritt definiert man $\zeta' \subset \mathfrak{P}^2(Z)$ durch

$(\mathfrak{a} \subset \mathfrak{P}(Z))$ $\quad \mathfrak{a} \in \zeta' :\Leftrightarrow$ Es gibt ein $i \in \{1,2\}$ mit $v_i^{-1}\mathfrak{a} \in \eta$ ([26], 6.5) .

Daraus entsteht ζ durch transfinite Induktion ([26], 8.1) .

Für $A \subset Z$ und jede Ordinalzahl $\alpha \in Ord$ wird definiert:

$$cl^0 A := A$$

$$cl^{\alpha+1} A := \{z \in Z \mid \{cl^\alpha\{z\}, cl^\alpha A\} \in \zeta'\} ,$$

und falls $\beta \in Ord$ eine Limeszahl ist:

$$cl^\beta A := \bigcup \{cl^\alpha A \mid \alpha < \beta\} .$$

Dann sei $cl\, A := \bigcup \{cl^\alpha A \mid \alpha \in Ord\}$, und für $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{P}(Z)$ gelte $\mathfrak{a} \in \zeta :\Leftrightarrow cl\,\mathfrak{a} = \{cl\, A \mid A \in \mathfrak{a}\} \in \zeta'$.

Da $cl = cl_\zeta$ ([26], 8.1) , bleibt zu zeigen:

(B) $\qquad cl\, v_2[Y] = v_2[Y]$.

Zunächst zeigen wir folgende Eigenschaft

(A) (Z,ζ) ist ein T1-Raum, d.h. für alle $z \in Z$ gilt $cl_\zeta\{z\} = \{z\}$.

zu (A)

Durch transfinite Induktion wird gezeigt, daß für alle $\alpha \in Ord$ und für alle $z \in Z$ stets $cl^\alpha\{z\} = \{z\}$ erfüllt ist. Daraus folgt dann für alle $z \in Z$ $cl_\zeta\{z\} = \{z\}$.

a) $cl^0\{z\} = \{z\}$ gilt für alle $z \in Z$.

b) Es wird angenommen, daß für alle $z \in Z$ $cl^\alpha\{z\} = \{z\}$ erfüllt ist. Dann folgt

$$\begin{aligned} cl^{\alpha+1}\{z\} &= \{y \in Z \mid \{cl^\alpha\{y\}, cl^\alpha\{z\}\} \in \zeta'\} = \\ &= \{y \in Z \mid \{\{y\},\{z\}\} \in \zeta'\} = \\ &= \{y \in Z \mid \left\{ \begin{array}{l} \{ v_1^{-1}(y) , v_1^{-1}(z) \} \in \eta \text{ oder} \\ \{ v_2^{-1}(y) , v_2^{-1}(z) \} \in \eta \end{array} \right\} = \\ &= \{y \in Z \mid v_1^{-1}(y) = v_1^{-1}(z) \text{ oder } v_2^{-1}(y) = v_2^{-1}(z)\} , \end{aligned}$$

denn (Y,n) ist ein N1-Raum (4.1.8(1)). Es folgt für alle $z\in Z$ $cl^{\alpha+1}\{z\} = \{z\}$.

c) Sei β eine Limeszahl. Für alle $\alpha<\beta$ und für alle $z\in Z$ gelte $cl^{\alpha}\{z\} = \{z\}$. Dann folgt auch $cl^{\beta}\{z\} = \bigcup_{\alpha<\beta} cl^{\alpha}\{z\} = \{z\}$.

zu (B)

Erneut durch transfinite Induktion:

a) $cl^{0}v_2[Y] = v_2[Y]$.

b) Für $\alpha\in Ord$ wird die Gleichheit von $cl^{\alpha}v_2[Y]$ und $v_2[Y]$ angenommen.

$$cl^{\alpha+1}v_2[Y] = \{z\in Z \mid \{cl^{\alpha}\{z\}, cl^{\alpha}v_2[Y]\}\in\zeta'\} =$$

$$= \{z\in Z \mid \{\{z\}, v_2[Y]\}\in\zeta'\} =$$

$$= \{z\in Z \mid v_1^{-1}(z)\subset cl_n v_1^{-1}[v_2[Y]] \text{ oder } v_2^{-1}(z)\subset cl_n v_2^{-1}[v_2[Y]]\} =$$

$$= v_2[Y] .$$

c) Ist β eine Limeszahl mit $cl^{\alpha}v_2[Y] = v_2[Y]$ für alle $\alpha<\beta$, so folgt $cl^{\beta}v_2[Y] = \bigcup_{\alpha<\beta} cl^{\alpha}v_2[Y] = v_2[Y]$.

Nun ergibt sich $cl\, v_2[Y] = v_2[Y]$, und damit ist alles bewiesen •

4.1.14 Korollar: In jeder der folgenden Kategorien sind die Epimorphismen gerade die dichten N-stetigen Abbildungen und die extremen Monomorphismen die abgeschlossenen N-Einbettungen:

(1) HausNear
(2) U-Near-1
(3) Pr-Near-1

Beweis:

(1) folgt aus 4.1.9 , 4.1.10 und 4.1.13 in Verbindung mit 4.1.4.

(2) und (3) ergeben sich aus 4.1.9 , 4.1.10 und 4.1.11•

4.1.15 Lemma: Sei $D \subset$ HausNear eine bireflektive oder bicoreflektive Unterkategorie einer Unterkategorie F von Near , in der jeder Epimorphismus dicht ist.
Dann sind die Epimorphismen in D gerade die dichten N-stetigen Abbildungen.

Beweis: Wegen 4.1.9 ist jede dichte und N-stetige Abbildung ein Epimorphismus. Jeder Epimorphismus in D ist ein Epimorphismus in F und als solcher dicht •

4.1.16 Korollar: Die Epimorphismen in Haus sind genau die dichten und N-stetigen Abbildungen, die extremen Monomorphismen gerade die abgeschlossenen T-Near-Einbettungen.

Beweis: Haus ist eine bicoreflektive Unterkategorie von HausNear (4.1.6(2)), so daß Lemma 4.1.15 Anwendung findet. Nimmt man nun in 4.1.10 für A die Kategorie T-Near , erhält man die Behauptung •

§ 4.2 Epireflektive Hüllen in HausNear

Zu den in Kapitel 3 untersuchten einfachen Kategorien sollen nun auch die epireflektiven Hüllen ihrer erzeugenden Räume in HausNear angegeben werden. Weiterhin werden Aussagen angestrebt, die den Zusammenhang von Hüllenbildung in Haus und in HausNear klären.
Wie üblich identifizieren wir die Kategorie der topologischen R_0-Räume und stetigen Abbildungen mit T-Near , so daß die Kategorie Haus der topologischen Hausdorff-Räume und die Kategorie CompHaus der kompakten Hausdorff-Räume als Unterkategorien von Near betrachtet werden können.

4.2.1 Satz: Die Kategorie CompHaus der kompakten T_2-Räume ist eine epireflektive Unterkategorie von HausNear. Der zugehörige Epireflektor CH , der jedem N-Raum (X,ξ) den T_2-kompakten N-Raum $(X,\xi)_{ch}$ zuordnet, ist das Kompositum $V \circ N1 \circ Pr$, wobei Pr den zu Pr-Near gehörigen Bireflektor ([26],4.23) , N1 den zu Near-1 gehörigen Epireflektor und V die Smirnov-Kompaktifizierung (oder die Vervollständigung eines N-Raumes ([26],15.5)) bezeichnet.

Beweis: Sei (X,ξ) ein hausdorffscher N-Raum. Dann ist (X,ξ_{pr}) ein proximaler N-Raum mit $1_X:(X,\xi)\longrightarrow(X,\xi_{pr})$ als universeller Abbildung. $(X,\xi_{pr})_{n1}$ bezeichne das Bild von (X,ξ_{pr}) unter N1 , und $n_X:(X,\xi_{pr})\longrightarrow(X,\xi_{pr})_{n1}$ den zugehörigen universellen Morphismus. Als Epimorphismus in Near ist n_X surjektiv (1.1.2(2)).
Anwendung von V auf $(X,\xi_{pr})_{n1}$ ergibt $(X,\xi)_{ch}$. Die zugehörige Einbettung $(X,\xi_{pr})_{n1}\hookrightarrow(X,\xi)_{ch}$ wird mit j_X bezeichnet ([26],15.3).

Dann ist $(X,\xi)_{ch}$ als Vervollständigung eines proximalen N1-Raumes ein kompakter T_2-Raum ([25],5.12(2)).

Definiere $h_X:(X,\xi)\longrightarrow(X,\xi)_{ch}$ durch

$h_X(x) := (j_X \circ n_X)(x)$ für alle $x\in X$.

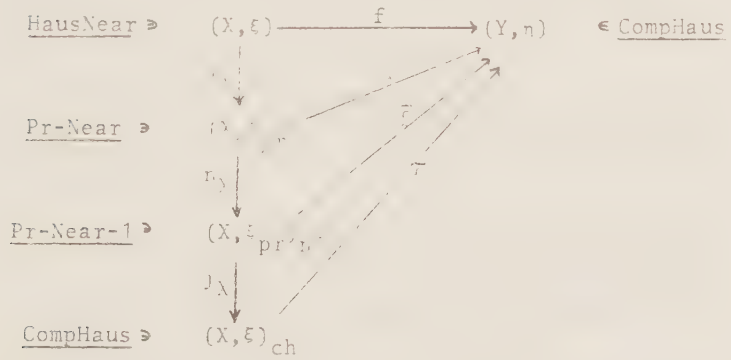
Als Kompositum von N-stetigen Abbildungen ist dann h_X N-stetig. h_X ist dicht: Sei $y\in X_{ch}$, dann gilt $\{\{y\}, j_X[X_{n1}]\}\in\xi_{ch}$, da j_X dicht ist ([26],15.4)

Da $n_X \circ 1_X$ surjektiv ist, folgt $j_X[X_{n1}] = h_X[X]$ und somit $y\in cl_{\xi_{ch}} h_X[X]$.

Als dichte N-stetige Abbildung ist h_X ein Epimorphismus in HausNear (4.1.9).

Sei nun (Y,η) ein kompakter T_2-Raum und $f:(X,\xi)\longrightarrow(Y,\eta)$ eine N-stetige Abbildung. Da $1_X:(X,\xi)\longrightarrow(X,\xi_{pr})$ universell ist, ist $f:(X,\xi_{pr})\longrightarrow(Y,\eta)$ N-stetig mit $f\circ 1_X = f$.

$n_X:(X,\xi_{pr})\longrightarrow(X,\xi_{pr})_{n1}$ universell ist, existiert genau eine N-stetige Abbildung $\bar{f}:(X,\xi_{pr})_{n1}\longrightarrow(Y,\eta)$, so daß $\bar{f}\circ n_X = f$ gilt.



Da $j_X:(X,\xi_{pr})_{n1}\longrightarrow(X,\xi)_{ch}$ in R-Near-1 universell ist ([26],15.9(1)), existiert genau eine N-stetige Abbil-

dung $\tilde{f}:(X,\xi)_{ch} \longrightarrow (Y,\eta)$, so daß $\tilde{f} \circ j_X = \bar{f}$ gilt. Da h_X ein Epimorphismus in HausNear ist, folgt nun, daß $\tilde{f}$ die einzige N-stetige Abbildung ist, die $\tilde{f} \circ h_X = f$ erfüllt •

4.2.2 Korollar: Sei $\underline{E}$ eine Unterkategorie von CompHaus. Dann sind äquivalent:

(1) $\underline{E}$ ist epireflektiv in CompHaus.

(2) $\underline{E}$ ist epireflektiv in Haus.

(3) $\underline{E}$ ist epireflektiv in R-Near-1.

(4) $\underline{E}$ ist epireflektiv in HausNear.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (4)
Für jeden kompakten T_2-Raum (X,ξ) sei $r_X:(X,\xi) \longrightarrow (X,\xi)_e$ die Epireflektion in CompHaus. Dann ist r_X surjektiv ([47] 8.2.24) . Offenbar ist dann für jedes Objekt (Y,η) aus HausNear $r_Y \circ h_Y:(Y,\eta) \xrightarrow{h_Y} (Y,\eta)_{ch} \xrightarrow{r_Y} ((Y,\eta)_{ch})_e$ eine Epireflektion in HausNear , da $r_Y \circ h_Y$ eine dichte Abbildung und somit ein Epimorphismus in HausNear ist.

(4) $\Rightarrow$ (1), (2), (3)
Das ist klar, da alle betrachteten Kategorien Unterkategorien von HausNear sind •

4.2.3 Korollar: Ist $\underline{K}$ eine Klasse von T_2-kompakten Räumen, so sind die epireflektiven Hüllen von $\underline{K}$ in Haus, HausNear und R-Near-1 alle gleich.

4.2.4 Beispiele: (1) (I,μ) bezeichne wieder das Einheitsintervall $[0,1]$ mit natürlicher Nearness-Struk-

tur μ . Dann gilt

$$EH_{\underline{HausNear}}(\{(I,\mu)\}) = EH_{\underline{R\text{-}Near\text{-}1}}(\{(I,\mu)\})$$
$$= EH_{\underline{Haus}}(\{(I,\mu)\})$$
$$= \underline{CompHaus} .$$

(2) (D_2,α) bezeichne wieder den zweipunktigen Raum D_2 versehen mit der diskreten N-Struktur α . Dann gilt

$$EH_{\underline{HausNear}}(\{(D_2,\alpha)\}) = EH_{\underline{R\text{-}Near\text{-}1}}(\{(D_2,\alpha)\})$$
$$= EH_{\underline{Haus}}(\{(D_2,\alpha)\})$$
$$= \left\{\begin{array}{l}\text{topologisch-nulldimensionale}\\ T_2\text{-kompakte Räume}\end{array}\right\}$$

Der zugehörige Epireflektor in $\underline{HausNear}$ ist

$$CH\bullet D: (X,\xi) \longmapsto (X,\xi_d)_{ch} ,$$

wobei D den zu $\underline{OdimNear}$ (3.3.3(2)) gehörigen Bireflektor bezeichnet. Eingeschränkt auf $\underline{Haus}$ ist $CH\bullet D$ gerade die Banaschewski-Kompaktifizierung [1].

Den Zusammenhang zwischen Hüllen in $\underline{Haus}$ und $\underline{HausNear}$ klärt der folgende Satz:

4.2.5 $\underline{Satz}$: Sei $\underline{K}$ eine Klasse von $\underline{HausNear}$-Objekten. Dann kommutieren Hüllenbildung und topologischer Bicoreflektor:

$$EH_{\underline{Haus}}(T[\underline{K}]) = T[EH_{\underline{HausNear}}(\underline{K})] .$$

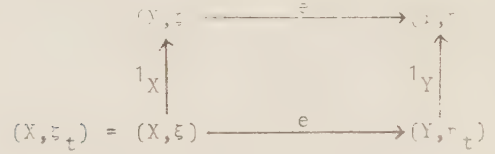
$\underline{Beweis}$: Um Satz 1.3.5 anwenden zu können, sind die folgenden Eigenschaften zu zeigen:

(a) Für jede epireflektive Unterkategorie $\underline{D}$ von $\underline{HausNear}$ ist $T[\underline{D}]$ abgeschlossen bezüglich $\underline{Haus}$-Unterobjekten.

(b) Das Bild $T(e)$ eines extremen Monomorphismus e in HausNear unter T ist stets ein extremer Monomorphismus in Haus.

zu (a)

Sei $(Y,\eta_t)\in T[\underline{D}]$, also $(Y,\eta)\in\underline{D}$ und (X,ξ) ein Unterobjekt von (Y,η_t) in Haus. Dann existiert eine abgeschlossene T-Near-Einbettung $e:(X,\xi)\longrightarrow(Y,\eta_t)$.



Sei ξ die N-initiale Struktur auf X bezüglich e und η. Dann gilt wegen 1.3.1(2) $(X,\xi_t) = (X,\xi)$.

Weiterhin ist $e:(X,\xi)\longrightarrow(Y,\eta)$ eine abgeschlossene N-Einbettung. Da $\underline{D}$ eine epireflektive Unterkategorie von HausNear ist, folgt $(X,\xi)\in\underline{D}$, und somit erhält man $(X,\xi) = (X,\xi_t)\in T[\underline{D}]$.

zu (b)

Seien (X,ξ) und (Y,η) hausdorffsche N-Räume und $e:(X,\xi)\longrightarrow(Y,\eta)$ ein extremer Monomorphismus in HausNear. Dann ist e wegen 4.1.14(1) eine abgeschlossene N-Einbettung.
Da T-Near eine bicoreflektive Unterkategorie der topologischen Kategorie Near ist, findet 1.3.1(2) Anwendung. Es folgt, daß $T(e):(X,\xi_t)\longrightarrow(Y,\eta_t)$ eine T-Near-Einbettung ist. Offenbar ist $T(e)$ abgeschlossen. Somit ist $T(e):(X,\xi_t)\longrightarrow(Y,\eta_t)$ als abgeschlossene T-Near-Einbettung ein extremer Monomorphismus in Haus.

Die Anwendung des Satzes 1.3.5 liefert nun die Behauptung •

4.2.6 Beispiele: (1)

Sei $\underline{K} := \{$metrisierbare uniforme Räume$\}$. Dann besagt 4.2.5 :

$$EH_{\underline{Haus}}(T[\underline{K}]) = EH_{\underline{Haus}}(\{\text{metrisierbare topologische R.}\})$$

$$= \{\text{vollständig reguläre Räume}\}$$

ist gleich mit

$$T[EH_{\underline{HausNear}}(\underline{K})] = T[\{\text{separiert uniforme Räume}\}] .$$

(2) Für die bislang nicht charakterisierten Hüllen von $(\mathbb{R},\rho)$ und $(\mathbb{R},\rho_t)$ in Near, wobei ρ die natürliche Uniformität auf $\mathbb{R}$ bezeichnet, gilt:

$$T[EH_{\underline{HausNear}}(\{(\mathbb{R},\rho)\})] = T[EH_{\underline{HausNear}}(\{(\mathbb{R},\rho_t)\})]$$

$$= EH_{\underline{Haus}}(\{(\mathbb{R},\rho_t)\})$$

$$= \{\text{reellkompakte } T_2\text{-Räume}\}\ [21].$$

(3) H.Herrlich [19] führte für unendliche Kardinalzahlen k die Klassen der k-kompakten Räume ein. M.Hušek [31] zeigte, daß die topologischen Räume $P_{\aleph_0} := [0,1]$ und $P_{k+1} := [0,1]^k - (1), k \geq \aleph_0$, diese Klassen in Haus einfach erzeugen. Dabei bezeichnet (1) das k-Tupel der Einsen ; Produkt und Unterräume wurden in Top gebildet. Er definierte weiterhin $\widetilde{P}_k := Pr(P_k)$, wo Pr den proximalen Bireflektor bezeichnet.
Im Einzelnen gilt:

Für jede unendliche Kardinalzahl k ist

(a) die epireflektive Hülle von $\widetilde{P}_k$ in HausNear die Klasse der k-vollständigen separierten Proximitäten [31],

(b) die epireflektive Hülle von P_k in Haus die Klasse der k-kompakten Räume [31] .

M.Hušek führte für beide Aussagen unabhängige Beweise. Mit Satz 4.2.5 folgt (b) jedoch direkt aus (a), denn

$$T[\{\text{k-vollständige separierte proximale Räume}\}] = \{\text{k-kompakte Räume}\}$$

ist aus [31] bekannt.

Der Vollständigkeit halber werden noch die Hüllen von $\tilde{P}_k$ in Near betrachtet.

4.2.7 Satz: Für jede unendliche Kardinalzahl k gilt:

(1) $BH_{Near}(\{\tilde{P}_k\}) = \underline{Pr\text{-}Near}$,

$EH_{Near}(\{\tilde{P}_k\}) = \underline{Pr\text{-}Near\text{-}1}$.

(2) $BH_{T\text{-}Near}(\{P_k\}) = BH_{T\text{-}Near}(\{\text{k-kompakte Räume}\})$

$= \{T_{3a}\text{-Räume}\}$,

$EH_{T\text{-}Near}(\{P_k\}) = EH_{T\text{-}Near}(\{\text{k-kompakte Räume}\})$

$= \{\text{vollständig reguläre Räume}\}$ [18].

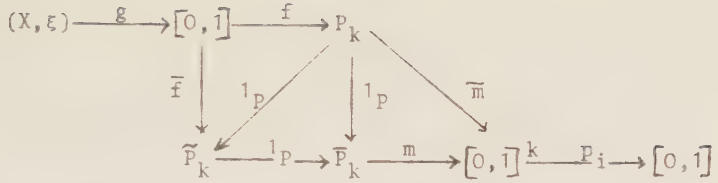
Beweis: zu (1)

Da $\tilde{P}_k$ ein N1-Raum ist, ergibt sich die epireflektive Hülle aus der bireflektiven Hülle durch Schnitt mit Near-1 (1.2.5 (2)).

Für $k=\aleph_0$ ist die bireflektive Hülle in 3.2.1 dargestellt, denn es gilt $\tilde{P}_{\aleph_0} = P_{\aleph_0} = ([0,1], u)$.

Sei nun $k>\aleph_0$. Man ist fertig, wenn man zeigt, daß $P_{\aleph_0}$ ein N-Unterraum von $\tilde{P}_k$ ist.

Der Einfachheit halber bezeichnen wir die Indexmenge des Produktes mit k und die Projektionen mit p_i , $i\in k$. $\bar{P}_k$ bezeichnet den N-Unterraum $[0,1]^k-(1)$ des N-Produktes $[0,1]^k$. Dann ist $P_k = T(\bar{P}_k)$.



Da das N-Produkt von kompakten topologischen Räumen mit dem topologischen Produkt übereinstimmt [26] , ist $[0,1]^k \in$ T-Near. Die Anwendung des Funktors T auf die N-Einbettung

$$m: \overline{P}_k \longrightarrow [0,1]^k$$

ergibt eine topologische Einbettung

$$\overline{m} \cdot \overline{P}_k \longrightarrow [0,1]^k$$

wegen 1.3.1(2)).

Auf Grund der universellen Eigenschaft von $1_P: P_k \longrightarrow \widetilde{P}_k$ fasert $1_P: P_k \longrightarrow \overline{P}_k$ über $\widetilde{P}_k$, d.h. $1_P: \widetilde{P}_k \longrightarrow \overline{P}_k$ ist ein Morphismus. Sei nun $j \in k$. Zu jedem $i \in k$, $i \neq j$, wählen wir ein $x_i \in [0,1]$, so daß $x_i \neq 1$ für wenigstens ein $i \neq j$ gilt. Die Abbildung

$$f: [0,1] \longrightarrow P_k$$

wird durch $f(y) := z$ definiert, wobei $z_i = \bigcap_{i \in k} p_i^{-1}(x_i) \cap p_j^{-1}(y)$ ist. Sie ist injektiv.

Für alle $i \in k$, $i \neq j$, ist dann $p_i \circ \overline{m} \circ f$ eine konstante Abbildung, und da $p_j \circ \overline{m} \circ f = 1_{[0,1]}$, folgt, daß $\overline{m} \circ f$ eine stetige Abbildung ist. Nun ist $\overline{m}$ eine Einbettung, also ist f stetig. Man erhält die N-stetige Abbildung

$$\bar{f}: [0,1] \longrightarrow \widetilde{P}_k$$

durch $\bar{f} := 1_P \circ f$. Wir zeigen, daß $\bar{f}$ eine N-Einbettung ist. Sei dazu (X,ξ) ein N-Raum und $g: X \longrightarrow [0,1]$ eine Abbildung, so daß $\bar{f} \circ g$ N-stetig ist. Dann ist auch $p_j \circ m \circ 1_P \circ \bar{f} \circ g = g$ N-stetig. Es folgt, daß $P_{\aleph_0} = [0,1]$ durch $\bar{f}$ nach $\widetilde{P}_k$ N-eingebettet wird, so daß die bireflektive Hülle von $[0,1]$ in Near in der

bireflektiven Hülle von P_k enthalten sein muß. Aus 3.2.2 und

$$\underline{\text{Pr-Near}} = BH_{\underline{\text{Near}}}(\{[0,1]\}) \subset BH_{\underline{\text{Near}}}(\{P_k\}) \subset \underline{\text{Pr-Near}} ,$$

folgt die Behauptung.

zu (2)

Mit Satz 1.3.2 und Beispiel 4.2.6(3) erhält man

$$BH_{\underline{\text{T-Near}}}(\{P_k\}) = BH_{\underline{\text{T-Near}}}(\{T(P_k)\}) = T\left[BH_{\underline{\text{Near}}}(\{P_k\})\right]$$

$$= T\left[\underline{\text{Pr-Near}}\right] = \{T_{3a}\text{-Räume}\} .$$

Da P_k ein k-kompakter Raum ist und jeder k-kompakte Raum ein T_{3a}-Raum ist, sind die bireflektiven Hüllen von P_k und der Klasse der k-kompakten Räume trivialerweise identisch.

Bei der Berechnung der epireflektiven Hülle ist nur mit der Klasse der T_1-Räume zu schneiden •

Beispiele

1.Beispiel

Es bezeichnen $(\mathbb{R}_1,\rho_1)$ und $(\mathbb{R}_2,\rho_2)$ zwei Kopien der reellen Zahlen mit der topologischen N-Struktur

$$\mathcal{A}\in\rho_i \Leftrightarrow \cap \mathrm{cl}\mathcal{A}\neq\emptyset ,$$

wobei cl die Hüllenoperation der natürlichen Topologie auf $\mathbb{R}$ sein soll.
(X,ξ) sei das topologische (=Nearness,=Seminearness, =Praenearness)-Coprodukt von $\mathbb{R}_1$ und $\mathbb{R}_2$. Sind j_1 und j_2 die Injektionen, so gilt demnach [30] für $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(X)$: $\mathcal{A}\in\xi \Leftrightarrow$ Es gibt ein $i\in\{1,2\}$ mit

$$j_i^{-1}\mathcal{A}\in\rho_i .$$

Y sei die Verheftung der Linien $\mathbb{R}_1$ und $\mathbb{R}_2$ an der Null, und $f:X\longrightarrow Y$ sei die surjektive Abbildung, die durch $f(x,y):=\begin{cases}0 & \text{falls } x=y=0\\ (x,y) & \text{sonst}\end{cases}$ definiert ist.
η sei die finale SN (=PN)-Struktur auf Y bezüglich f und ξ. Dann gilt für $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(Y)$:

$$\mathcal{A}\in\eta \Leftrightarrow f^{-1}\mathcal{A}\in\xi .$$

Somit ist f in SNear, PNear und Grill eine Quotientenabbildung.
Für $i\in\{1,2\}$ sei $A_i:=(-\infty,0)\subset\mathbb{R}_i$. $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(X)$ sei definiert durch $\mathcal{A}:=\{j_1[A_1],j_2[A_2]\}$.
Dann ist $\mathcal{A}\notin\xi$, da $j_i^{-1}\mathcal{A}=\{A_i,\emptyset\}\notin\rho_i$ für alle i.
Es folgt, daß $f\mathcal{A}\notin\eta$ ist, da $f^{-1}f\mathcal{A}=\mathcal{A}\notin\xi$ ist.
Sei nun $y:=(f\circ j_1)(0)=(f\circ j_2)(0)$. Dann ist für alle $i\in\{1,2\}$ $y\in\mathrm{cl}_\eta(f\circ j_i)[A_i]$, denn aus $0\in\mathrm{cl}_{\rho_i}A_i$ erhält man $j_i(0)\in\mathrm{cl}_\xi j_i[A_i]$, und somit $y\in\mathrm{cl}_\eta(f\circ j_i)[A_i]$.
Also gilt: (X,ξ) ist ein topologischer N-Raum, (Y,η) ist ein SN-Quotient (=PN-Quotient) von (X,ξ), und (Y,η) ist kein topologischer PN-Raum, da $\cap\mathrm{cl}_\eta f\mathcal{A}\neq\emptyset$ aber

$\mathfrak{A} \in \mathfrak{n}$ gilt.

2.Beispiel

Sei $X := [0,1]$. Ist $A \subset X$ und $x \in X$, so sei $d(x,A) := \inf\{|x-y| \mid y \in A\}$. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wird der Hüllenoperator $h: \mathfrak{P}(X) \longrightarrow \mathfrak{P}(X)$ definiert durch

$$hA := \begin{cases} \emptyset & \text{falls } A = \emptyset , \\ \{x\} & \text{falls } A = \{x\} \text{ für ein } x \in X, \\ \{x \mid d(x,A) \in \varepsilon\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\xi \subset \mathfrak{P}^2(X)$ wird nun wie folgt definiert:

$$\mathfrak{A} \in \xi \Leftrightarrow \bigcap h\mathfrak{A} \neq \emptyset .$$

Da die Axiome (H.0)-(H.3) der Definition 2.1.1 erfüllt sind, liefert die obige Definition von ξ einen topologischen PN-Raum (X,ξ) (2.1.4(1)), wie auch bei M.S.Hastings ([17] 4.9(b)) ausgeführt wird.
(X,ξ) ist kein HN-Raum, denn h ist nicht idempotent.
(X,ξ) ist auch kein SN-Raum, denn sind $x,y \in X$ mit $0 < d(x,y) < \varepsilon$, so gilt $\{\{x\},\{y\}\} \notin \xi$, aber $\{\{x\},\{y\}\} \vee \{\{x\},\{y\}\} \in \xi$. Das widerspricht dem Axiom (N.4) der Definition 1.2.1.

3.Beispiel

Sei $X := [0,1]$. Der Hüllenoperator $h: \mathfrak{P}(X) \longrightarrow \mathfrak{P}(X)$ sei definiert durch

$$hA := \begin{cases} \emptyset & \text{falls } A = \emptyset , \\ \inf A, \sup A & \text{sonst .} \end{cases}$$

$\xi \subset \mathfrak{P}^2(X)$ wird gegeben durch

$$\mathfrak{A} \in \xi \Leftrightarrow \bigcap h\mathfrak{A} \neq \emptyset .$$

Dann erfüllt h die Axiome (H.0)-(H.3) und (H.5) der Definition 2.1.1 und (X,ξ) ist deshalb ein topologi-HN-Raum (2.1.4(1)).
h erfüllt jedoch nicht das Vereinigungsaxiom (H.4), so daß (X,ξ) kein SN-Raum ist.

4.Beispiel

Sei $X := [0,1]$. Ist A eine Teilmenge von X , so bezeichnet $\overline{A}$ den Abschluß und A' die Menge aller Häufungspunkte von A in der natürlichen Topologie. Zu $\varepsilon > 0$ wird ein Hüllenoperator $h: \mathfrak{P}(X) \longrightarrow \mathfrak{P}(X)$ wie folgt definiert

$$hA := \begin{cases} \emptyset & \text{falls } A = \emptyset \text{ , und sonst} \\ \{y \in X \mid \text{Es gibt ein } x \in A' \text{ mit } d(x,y) \leq \varepsilon\} \cup \overline{A} \text{ .} \end{cases}$$

Dann gilt $h\{x\} = \{x\}$ für alle $x \in X$, und für $A, B \subset X$ erhält man $h(A \cup B) = hA \cup hB$. Sei nämlich $y \in h(A \cup B)$. Dann folgt $y \in \overline{A \cup B}$ oder es gibt ein $x \in (A \cup B)'$ mit $d(x,y) \leq \varepsilon$.

Im ersten Fall folgt $y \in \overline{A} \cup \overline{B}$, also $y \in hA \cup hB$.

Im zweiten Fall folgt $x \in A' \cup B'$, da $(A \cup B)' = A' \cup B'$ für beliebige Teilmengen zutreffend ist, und man erhält $y \in hA \cup hB$. Die Umkehrung ist ebenso einfach.

h ist jedoch nicht idempotent.

Durch $\mathcal{O} \in \xi :\Leftrightarrow \bigcap h\mathcal{O} \neq \emptyset$ erhält man deshalb einen topologischen SN-Raum, der jedoch kein HN-Raum ist (2.1.4.(1)).

Bezeichnungen

Wir übernehmen im Wesentlichen die Bezeichnungen aus [25] und [26] . Die häufigsten Symbole werden im Folgenden dargestellt.

A, B, C, ... X, Y, Z	Mengen
$\mathfrak{P}(X)$	Potenzmenge von X
$\|X\|$	Kardinalität von X
a, b, c, ... x, y, z	Elemente von X
$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ...	Teilmengen von $\mathfrak{P}(X)$
α, β, γ, ... ξ, η, ζ	Teilmengen von $\mathfrak{P}^2(X)$
$\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, ..., $\underline{\text{Near}}$ ...	Klassen von Objekten und Kategorien
$B:\underline{A}\longrightarrow\underline{B}$, $C:\underline{A}\longrightarrow\underline{C}$	Funktoren
f, g, h,...	Abbildungen und Morphismen

Sei X eine Menge, $\mathcal{A}\subset\mathfrak{P}(X)$ und $\mathcal{B}\subset\mathfrak{P}(X)$:

$\bigcap\mathcal{A} = \bigcap\{A\,|\,A\in\mathcal{A}\}$, $\bigcup\mathcal{A} = \bigcup\{A\,|\,A\in\mathcal{A}\}$

$\mathcal{A}\prec\mathcal{B} :\Leftrightarrow \forall A\in\mathcal{A}\ \exists B\in\mathcal{B}$ mit $A\subset B$ ($\mathcal{A}$ verfeinert $\mathcal{B}$)

$\mathcal{A}\preccurlyeq\mathcal{B} :\Leftrightarrow \forall A\in\mathcal{A}\ \exists B\in\mathcal{B}$ mit $B\subset A$ ($\mathcal{A}$ coverfeinert $\mathcal{B}$)

$\mathcal{A}\wedge\mathcal{B} = \{A\cap B\,|\,A\in\mathcal{A},\ B\in\mathcal{B}\}$

Ist $\xi\subset\mathfrak{P}^2(X)$, so ist

$\widehat{\xi} := \{\mathcal{A}\subset\mathfrak{P}(X)\,|\,\{X\setminus A\,|\,A\in\mathcal{A}\}\notin\xi\}$, und

$(\xi) := \{\mathcal{A}\subset\mathfrak{P}(X)\,|\,\exists\,\mathcal{B}\in\xi$ mit $\mathcal{B}\prec\mathcal{A}\}$ (Erzeugnis von ξ)

Weiterhin seien nun Y eine Menge, $f:X\longrightarrow Y$ eine Abbildung und $\mathcal{C}\subset\mathfrak{P}(Y)$.

$f\mathcal{A} := \{f[A]\,|\,A\in\mathcal{A}\} = \{\{f(x)\,|\,x\in A\}\,|\,A\in\mathcal{A}\}$,

$f^{-1}\mathcal{C} := \{f^{-1}[C]\,|\,C\in\mathcal{C}\} = \{\{x\in X\,|\,f(x)\in C\}\,|\,C\in\mathcal{C}\}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BANASCHEWSKI,B., UEBER NULLDIMENSIONALE RAEUME,MATH.NACHR. 13(1955)129-140.

[2] BENTLEY,H.L., NEARNESS SPACES AND EXTENSIONS OF TOPOLOGICAL SPACES, STUDIES IN TOPOLOGY, N.STAVRAKAS AND K.ALLEN, ED., ACADEMIC PRESS, NEW YORK 1975, 47-66.

[3] BENTLEY,H.L. + H.HERRLICH, EXTENSIONS OF TOPOLOGICAL SPACES, PROC. OF MEMPHIS TOP.CONF. 1975.

[4] BENTLEY,H.L. + H.HERRLICH + W.A.ROBERTSON, CONVENIENT CATEGORIES FOR TOPOLOGISTS, COMMENTATIONES MATH.UNIV. CAROLINAE 17(1976)207-227.

[5] BENTLEY,H.L., THE ROLE OF NEARNESS SPACES IN TOPOLOGY, LECTURE NOTES 540, CATEGORICAL TOPOLOGY, PROC. OF THE CONFERENCE HELD AT MANNHEIM 1975, E.BINZ + H. HERRLICH (ED.), BERLIN ET AL. 1976, 1-22.

[6] BLEFKO,R., ON E-COMPACT SPACES, THESIS, UNIVERSITY PARK, PENNSYLVANIA 1965.

[7] BRUEMMER,G.C.L., A CATEGORIAL STUDY OF INITIALITY IN UNIFORM TOPOLOGY, THESIS, UNIVERSITY OF CAPE TOWN 1971.

[8] CECH,E., TOPOLOGICAL SPACES, ACADEMIA, PRAGUE 1966.

[9] CHOQUET,G., SUR LES NOTIONS DE FILTRE ET DE GRILLE, C.R. ACAD.SCI. PARIS 224(1947)171-173.

[10] DAVIS,A.S., INDEXED SYSTEM OF NEIGHBOURHOODS FOR GENERAL TOPOLOGICAL SPACES,AMER.MATH.MONTHLY 68(1961)886-893

[11] ELLIS,R.L., EXTENDING CONTINUOUS FUNCTIONS ON ZERO-DIMENSIONAL SPACES, MATH.ANN. 186(1970)114-122.

[12] ENGELKING,R. + S.MROWKA, ON E-COMPACT SPACES, BULL.ACAD. POLON.SCI.SER.SCI.MATH.ASTR.PHYS. 6(1958)429-436.

[13] FRANKLIN,S.P., NATURAL COVERS, COMPOSITIO MATH. 21(1969)

[14] FREYD,P., ABELIAN CATEGORIES, NEW YORK 1964.

[15] GRIMEISEN,G., GEFILTERTE SUMMATION VON FILTERN UND ITERIERTE GRENZPROZESSE I,II, MATH.ANN. 141(1960)318--342 UND MATH.ANN. 144(1961)386-417.

[16] GROTEMEYER,K.P., TOPOLOGIE, MANNHEIM ET AL. 1969.

[17] HASTINGS,M.S., EPIREFLECTIVE HULLS IN NEAR, THESIS, UNIV. OF TOLEDO 1975.

[18] HERRLICH,H., E-KOMPAKTE RAEUME, MATH.Z. 96(1967)228-255.

[19] HERRLICH,H., FORTSETZBARKEIT STETIGER ABBILDUNGEN UND KOMPAKTHEITSGRAD TOPOLOGISCHER RAEUME, MATH.Z. 96(1967) 64-72.

[20] HERRLICH,H. + J.VAN DER SLOT, PROPERTIES WHICH ARE CLOSELY RELATED TO COMPACTNESS, INDAG.MATH. 29(1967)524-529.

[21] HERRLICH,H., TOPOLOGISCHE REFLEXIONEN UND COREFLEXIONEN, LECTURE NOTES 78, BERLIN ET AL. 1968.

[22] HERRLICH,H. + G.E.STRECKER, COREFLECTIVE SUBCATEGORIES IN GENERAL TOPOLOGY, FUND.MATH. 73(1972)199-218.

[23] HERRLICH,H. REMARKS AND PROBLEMS CONCERNING NEARNESS STRUCTURES, PROBLEMS IN CATEGORICAL TOPOLOGY, CATEGORICAL TOPOLOGY CONFERENCE AT SOUTHERN ILLINOIS UNIVERSITY, CARBONDALE 1973.

[24] HERRLICH,H. + G.E.STRECKER, CATEGORY THEORY, BOSTON 1973.

[25] HERRLICH,H., A CONCEPT OF NEARNESS, GEN.TOP.APPL. 4(1974) 191-212.

[26] HERRLICH,H., TOPOLOGICAL STRUCTURES, MATH.CENTRE TRACTS 52, AMSTERDAM 1974, 59-122.

[27] HERRLICH,H., TOPOLOGICAL FUNCTORS, GEN.TOP.APPL. 4(1974) 125-142.

[28] HERRLICH,H., SOME TOPOLOGICAL THEOREMS WHICH FAIL TO BE TRUE, LECTURE NOTES 540, PROC. OF THE CONFERENCE HELD AT MANNHEIM 1975, E.BINZ + H.HERRLICH (ED.), BERLIN ET AL. 1976, 265-285.

[29] HOFFMANN,R.E., DIE KATEGORIELLE AUFFASSUNG DER INITIAL- UND FINALTOPOLOGIE, DISSERTATION, RUHR-UNIVERSITAET BOCHUM 1972.

[30] HUNSAKER,W.N. + P.L.SHARMA, NEARNESS STRUCTURES COMPATIBEL WITH A TOPOLOGICAL SPACE, ARCH.MATH. 25(1974)172-177

[31] HUSEK,M., THE CLASS OF K-COMPACT SPACES IS SIMPLE, MATH.Z. 110(1969)123-126.

[32] ISBELL,J.R., UNIFORM SPACES, PROVIDENCE 1964.

[33] ISBELL,J.R., SUBOBJECTS,ADEQUACY,COMPLETENESS AND CATEGORIES OF ALGEBRAS, ROZPRAWY MATH. 36(1964)1-32.

[34] IVANOVA,V.M. + A.A.IVANOV, CONTIGUITY SPACES AND BICOMPACT EXTENSIONS, IZV.AKAD.NAUK SSSR 23(1959)613-634 (R).

[35] KAMNITZER,S.H., PROTOREFLECTIONS,RELATIONAL ALGEBRAS AND TOPOLOGY, THESIS, UNIVERSITY OF CAPE TOWN 1974.

[36] KATETOV,M., ALLGEMEINE STETIGKEITSSTRUKTUREN, PROC.INT. CONGR.MATH., STOCKHOLM 1962, 473-479.

[37] KATETOV,M., ON CONTINUITY STRUCTURES AND SPACES OF MAPPINGS, COMMENTATIONES MATH. UNIV. CAROLINAE 6(1965) 257-278.

[38] KENNISON,J.F., REFLECTIVE FUNCTORS IN GENERAL TOPOLOGY AND ELSEWHERE, TRANS.AMER.MATH.SOC. 118(1965)303-315.

[39] KENT,D., CONVERGENCE FUNCTIONS AND THEIR RELATED TOPOLOGIES, FUND.MATH. 54(1964)125-133.

[40] MARNY,TH., RECHTS-BIKATEGORIESTRUKTÜREN IN TOPOLOGISCHEN KATEGORIEN, DISS., FU BERLIN 1973.

[41] MONNA,A., REMARQUES SUR LES METRIQUES NON-ARCHIMEDIENNES I, INDAG.MATH. 12(1950)470-481.

[42] MORITA,K., ON THE SIMPLE EXTENSION OF A SPACE WITH RESPECT TO A UNIFORMITY I-IV, PROC.JAPAN AKAD. 27(1951) 65-72,130-137,166-171,632-636.

[43] MROWKA,S.G.,A PROPERTY OF HEWITT-EXTENSION NX OF TOPOLOGICAL SPACES, BULL.ACAD.POLON.SCI.SER.SCI.MATH.ASTR. PHYS. 6(1958)95-96.

[44] MUELLER,H., VERTAUSCHBARKEIT VON REFLEXIONEN UND COREFLEXIONEN IN TOPOLOGISCHEN KATEGORIEN, VORTRAG, TAGUNG DER ARBEITSGRUPPE TOPOLOGIE DES NORDWESTDEUTSCHEN KATEGORIENSEMINARS IN BERLIN 1974.

[45] NAIMPALLY,S.A., REFLECTIVE FUNCTORS VIA NEARNESS, FUND. MATH. 85(1974)245-255.

[46] NEL,L.D., INITIALLY STRUCTURED CATEGORIES AND CARTESIAN CLOSEDNESS, CAN.J.MATH. 27(1975)1361-1377.

[47] PREUSS,G., ALLGEMEINE TOPOLOGIE, BERLIN 1972.

[48] ROBERTSON,W.A., CONVERGENCE AS A NEARNESS CONCEPT, THESIS, CARLETON UNIVERSITY, 1975.

[49] SHANIN,N.A., ON SEPARATION IN TOPOLOGICAL SPACES, DOKLADY AKAD.NAUK SSSR 38(1943)110-113.

[50] SHARMA,P.L. + W.N.HUNSAKER, SUBCATEGORIES OF NEAR, PREPRINT.

[51] TYCHONOFF,A., UEBER DIE TOPOLOGISCHE ERWEITERUNG VON RAEUMEN, MATH.ANN. 102(1930)544-561.

[52] WYLER,O., TOP CATEGORIES AND CATEGORICAL TOPOLOGY, GEN. TOP.APPL. 1(1971)17-28.

Lebenslauf

Am 25.Oktober 1949 wurde ich als drittes Kind des Prokuristen Clemens Heldermann und seiner Frau Maria, geborene Birkenbach, in Stuttgart geboren. Von April 1956 bis April 1960 besuchte ich die Grundschule in Rottweil (Bad.Württ.) und wechselte dann auf das neusprachlich-naturwissenschaftliche Leibniz-Gymnasium, ebenfalls in Rottweil, über. Der dortige Gang bis zum Abitur, das ich im Juni 1968 ablegte, wurde nur 1966 durch einen mehrmonatigen Schulbesuch an der Leeds Grammar School in Leeds, England, unterbrochen.

Mit dem WS 1968/69 begann ich an der Albert-Ludwig-Universität in Freiburg ein Doppelstudium in den Fächern Mathematik und Wirtschaftswissenschaften.

Ich beschäftigte mich zunächst schwerpunktmäßig mit EDV. So erlernte ich mehrere Programmiersprachen, was als abgeschlossene Berufsausbildung als Programmierer anerkannt wurde. Als solcher arbeitete ich befristet bei der Firma Messerschmitt in Augsburg.

Im Juli 1970 legte ich in Freiburg das Vordiplom in Volkswirtschaftslehre ab. Diesem folgte im Oktober 1970 das Vordiplom in Mathematik.

Mit Ende des WS 70/71 trat ich eine fünfmonatige Afrika-Asien--Reise an.

Im WS 71/72 setzte ich mein Studium zunächst in Grenoble fort, dann ab dem SS 1972 jedoch an der Freien Universität Berlin. Das Diplom in Mathematik legte ich im April 1974 ab.

Seit dem 5.8.1974 bin ich Assistent für Allgemeine Volkswirtschaftslehre am Fachbereich 10, Wirtschaftswissenschaften, der Freien Universität. Im WS 1976/77 wurde ich Mitglied des von Prof.G.Preuß geleiteten Forschungsprojektsschwerpunktes "Kategorielle Topologie" am Fachbereich 19, Mathematik.

Meine hauptsächlichen Lehrer in Mathematik waren in Freiburg die Professoren Geis, Hermes, Klingen und D.Morgenstern, in Berlin die Professoren Güntzer,Pachale und Preuß.

In Ökonomie waren die Freiburger Professoren Brandt, Hoppmann, Lüdecke und H.Müller, in Berlin Professor Elsner meine Lehrer.

Seit 1972 bin ich mit Cristina Doz verheiratet. In den Jahren 1974 und 1976 sind unsere beiden Kinder geboren.

Die vorliegende Dissertation wurde unter Leitung von Prof.Dr. G.Preuß angefertigt.